11.8 Verschiebearbeit im radialsymmetrischen elektrischen Feld $(\mathbf{E \neq konst})$

Für die Verschiebearbeit im elektrischen Feld gilt:

$$W_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_C(r)d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} F_C(r)dr$$

$$W_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq \cdot \int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr =$$

$$= -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

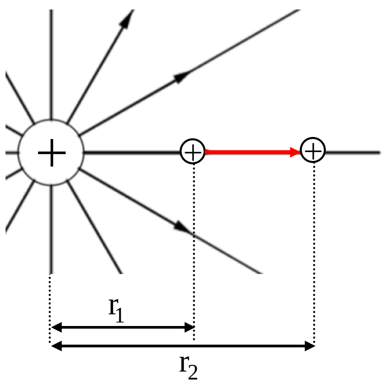
$$\boxed{W_{12} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)}$$ Verschiebearbeit im radialsym. Feld

Erklärung für das Minuszeichen vor dem $\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_C(r)d\vec{r}$:

Im radialsymmetrischen Gravitationsfeld ist die Gravitationskraft zur felderzeugenden Masse hin gerichtet (bei gleichem Vorzeichen der Massen!).
Im radialsymmetrischen elektrischen Feld ist, bei gleichem Vorzeichen der Ladungen, die Coulombkraft von der felderzeugenden Ladung weg gerichtet.
Um nun die technologische Definition der Verschiebearbeit aufrecht zu erhalten ist deshalb hier ein Minuszeichen von Nöten!

<u>Deutung der Vorzeichen der Verschiebearbeit</u>:
$W_{12} > 0$: Arbeitsaufwand wird von außen zugeführt, die Feldenergie nimmt zu.
$W_{12} < 0$: Das Feld verrichtet am Probekörper Arbeit, die Feldenergie sinkt.

Hat man also nun eine positive felderzeugende Ladung Q und eine ebenfalls positive Probeladung q im elektrischen Feld der Ladung Q, so wird aufgrund der abstoßenden Kraft F_C die Probeladung q von der Ladung Q wegbewegt. Es kommt also zu einer Vergrößerung des Abstandes der beiden Ladungen. Da dieser Vorgang von alleine (ohne äußere Krafteinflüsse) geschieht ist nach obiger Beziehung die Verschiebearbeit W_{12} negativ.
Die Ladung q wird also aufgrund der abstoßenden Kraft beschleunigt und gewinnt an kinetischer Energie. Die Zunahme der kinetischen Energie aber hat eine Abnahme der potentiellen Energie zur Folge.



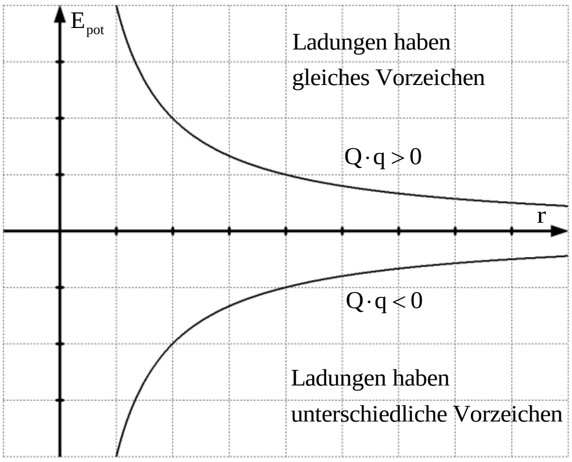
<u>Merke</u>:
Die Verschiebearbeit W_{12} zwischen den Feldpunkten 1 und 2 die an dem Probekörper verrichtet wird entspricht der Änderung der potentiellen Energie des verschobenen Probekörpers.

Befindet sich dann die Ladung q im Unendlichen, dann hat die potentielle Energie auf ihren niedrigsten Wert abgenommen. Es liegt daher Nahe, dass man diesen niedrigsten Wert für die potentielle Energie, also $E_{pot}(r=\infty)=0$ als Nullniveau der potentiellen Energie festlegen kann.

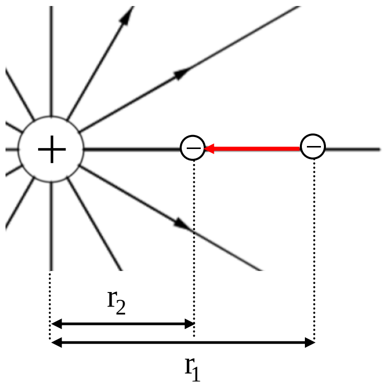
Potentielle Energie für Nullniveau im Unendlichen
Liegt das Nullniveau der potentiellen Energie einer Ladung q im elektrischen Feld der Ladung Q im Unendlichen, dann folgt für die potentielle Energie der Ladung q:

$$\left.\begin{aligned} W_{\infty r} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot Q\cdot q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_\infty}\right)=\frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} \\ W_{\infty r} &= \Delta E_{pot} = E_{pot}(r) - \underbrace{E_{pot}(r_\infty)}_{=0} = E_{pot}(r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad E_{pot}(r) = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

Für den Verlauf des Graphen im $r - E_{pot} - \text{Diagramm}$ erhält man dann:



Betrachtet man nun den Fall einer positiven felderzeugenden Ladung Q und einer negativen Probeladung q, so wird aufgrund der anziehenden Kraft F_C die Probeladung q zur Ladung Q hinbewegt. Es kommt also zu einer Verkleinerung des Abstandes der beiden Ladungen. Auch dieser Vorgang geschieht von alleine (ohne äußere Krafteinflüsse).
Die Ladung q wird also aufgrund der anziehenden Kraft beschleunigt und gewinnt an kinetischer Energie. Die Zunahme der kinetischen Energie führt auch hier wiederum zur Abnahme der potentiellen Energie.

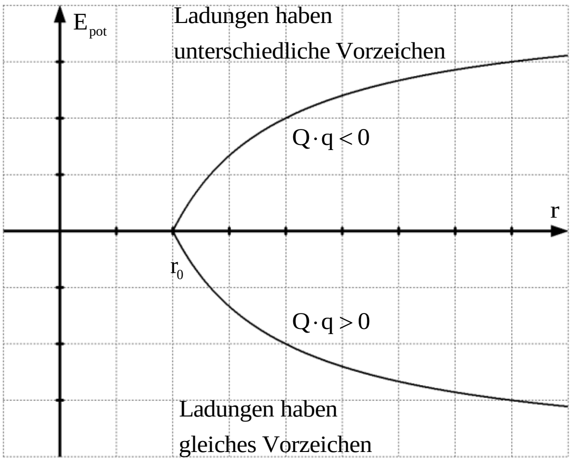


Letztendlich würde die Ladung q auf die Oberfläche der Ladung Q (mit dem Radius r_0) auftreffen. Die potentielle Energie hat auch hier wieder auf ihren niedrigsten Wert abgenommen.
Ähnlich beim freien Fall in Gravitationsfeld der Erde hat die Ladung an der Kugeloberfläche dann die potentielle Energie $E_{pot}(r_0) = 0$. Somit bietet sich auch die Möglichkeit die Oberfläche der Ladung Q als Nullniveau der potentiellen Energie festzulegen.

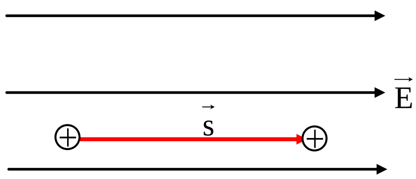
Das Nullniveau liegt auf der Oberfläche der felderzeugenden Ladung Q
Liegt das Nullniveau der potentiellen Energie einer Ladung q im elektrischen Feld der Ladung Q auf der Oberfläche der Ladung Q mit dem Radius r_0, dann folgt für die potentielle Energie der Ladung q:

$$\left.\begin{aligned} W_{r_0 r} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot Q\cdot q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right) \\ W_{r_0 r} &= \Delta E_{pot} = E_{pot}(r) - \underbrace{E_{pot}(r_0)}_{=0} = E_{pot}(r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad E_{pot}(r) = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

Für den Verlauf des Graphen im $r - E_{pot} -$Diagramm erhält man dann:



11.9 Verschiebearbeit im homogenen elektrischen Feld $(E = \text{konst.})$
Verschiebt man eine positiven Probeladung q in einem homogenen Feld der Feldstärke $\vec{E}$ um die Strecke $\vec{s}$, so gilt für die Verschiebearbeit:



$W = -\vec{F}_C \circ \vec{s}$ mit $\vec{F}_C = q\cdot\vec{E}$

$W = -q\cdot\vec{E}\circ\vec{s}$

$W = -q\cdot E\cdot s\cdot\cos(\sphericalangle(E;s))$ mit $\sphericalangle(E;s) = 0°$

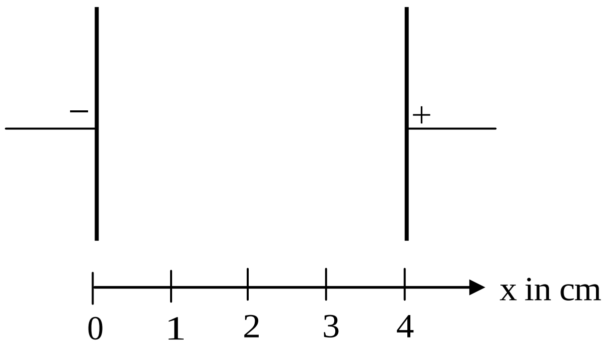
$W = -q\cdot E\cdot s$

$$\boxed{W = -q\cdot E\cdot s}$$ Verschiebearbeit im homogenen Feld

Aufgaben

1. Ein radialsymmetrisches elektrisches Feld wird durch die Ladung $Q = 1{,}0\,\text{nC}$ erzeugt. Die Ladung befindet sich auf einer Metallkugel mit dem Radius $r_0 = 1{,}0\,\text{cm}$. In das elektrische Feld wird eine Probeladung $q = 4{,}0\,\text{pC}$ gebracht. Berechnen Sie die Feldarbeit W, um die Probeladung vom Punkt P_1 mit $r_1 = 2{,}0\,\text{cm}$ zum Punkt P_2 mit $r_2 = 4{,}0\,\text{cm}$ zu verschieben.

2.0 Im Innenraum eines Plattenkondensators herrscht ein homogenes Feld mit der elektrischen Feldstärke $E = 1{,}0 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$. Die Platten haben einen Abstand von $d = 4{,}0\,\text{cm}$. Ein Körper mit der Ladung $q = 1{,}0\,\text{nC}$ soll von der negativen Platte zur positiven Platte verschoben werden.



2.1 Stellen Sie die potentielle Energie E_{pot} der Ladung q in Abhängigkeit vom Abstand x graphisch dar, wenn das Nullniveau der potenziellen Energie auf der negativen Platte liegt.

2.2 Der Körper mit der Ladung q wird bei $x = d$ aus dem Ruhezustand freigegeben. Berechnen Sie die Auftreffgeschwindigkeit v_E auf der negativ geladenen Kondensatorplatte und die Flugdauer t_F des Körpers, wenn dieser die Masse $m = 2{,}0\,\mu\text{g}$ hat.

3.0 Nach der Bohr'schen Theorie für das Wasserstoffatom kann das Elektron den Atomkern (Proton) nur auf bestimmten Kreisbahnen, den so genannten Quantenbahnen, umlaufen. Die kleinste Kreisbahn des Elektrons (1. Quantenbahn) hat den Radius $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$

3.1 Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 des Elektrons auf der 1. Quantenbahn.

3.2 Berechnen Sie die Gesamtenergie E_{Ges} des Elektrons auf der 1. Quantenbahn
Hinweis: Das Nullniveau der potentiellen Energie soll im Unendlichen liegen.

3.3 Berechnen Sie die Energiedifferenz ΔE, um das Elektron von der 1. Quantenbahn ins Unendliche zu bringen.
Welche Bedeutung hat dieser Energiebetrag für das Wasserstoffatom?

3.4 Berechnen Sie, welche Arbeit verrichtet werden muss, um das Elektron von der Umlaufbahn r_1 in die nächste Umlaufbahn (2. Quantenbahn) $r_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$ zu bringen.