11.2 Coulomb´sches Gesetz - Aufgaben

1.1 Berechne den Betrag der elektrischen Kraft zwischen Atomkern und Elektron bei einem Wasserstoffatom! (Geg.: $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$)

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q \cdot q|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}} \cdot \frac{\left(1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{As}\right)^2}{\left(5,3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}\right)^2}$$

$$F_C = \underline{\underline{8,21 \cdot 10^{-8}\,\text{N}}}$$

1.2 Vergleiche den Wert von 1.1 mit der Gravitationskraft zwischen Atomkern und Elektron! Welche Folgerung kann man daraus ziehen?

$$F_{Gr} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = G \cdot \frac{m_p \cdot m_e}{r_1^2} = 6,673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{1,673 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}{\left(5,3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}\right)^2}$$

$$F_{Gr} = \underline{\underline{3,62 \cdot 10^{-47}\,\text{N}}}$$

Die Gravitationskraft ist vernachlässigbar klein.

1.3 Mit welcher Bahngeschwindigkeit v umkreist das Elektron den Atomkern?

$$|F_Z| = |F_C|$$

$$m_e \cdot \frac{v^2}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_1^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e \cdot r_1}}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}} \cdot \frac{\left(1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{As}\right)^2}{9,109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 5,3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}}} = \underline{\underline{2,19 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

1.4 Wie viele Umläufe um den Atomkern vollzieht das Elektron in einer Sekunde?

$$\frac{v}{r_1} = \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{n}{t} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{v \cdot t}{2\pi r_1} = \frac{2,19 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,0\,\text{s}}{2\pi \cdot 5,3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}} = \underline{\underline{6,58 \cdot 10^{15}}}$$

1.5 **(2006 Aufgabe I Nr. 2.3)** Nach dem Bohr´schen Atommodell kann das Elektron den Atomkern nur auf bestimmten Bahnen umlaufen. Für den Radius r_n einer solchen Kreisbahn gilt: $r_n = r_1 \cdot n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$.
Bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_n $\left(r_n = r_1 \cdot n^2\right)$, so besitzt es die kinetisch Energie $E_{kin,n}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$E_{kin,n} = 2,2 \cdot 10^{-18}\,\text{J} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$F_Z = F_C$$

$$m_e \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e \cdot r}$$

$$v_n^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e \cdot r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e \cdot r_1 \cdot n^2}$$

$$E_{kin,n} = \tfrac{1}{2} m_e v_n^2 = \tfrac{1}{2} m_e \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e \cdot r_1 \cdot n^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_1} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$E_{kin,n} = \frac{1}{8\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}} \cdot \frac{\left(1{,}6{,}02 \cdot 10^{-19}\,C\right)^2}{5{,}3 \cdot 10^{-11}\,m} \cdot \frac{1}{n^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-18}\,J \cdot \frac{1}{n^2}$$

Einheitenkontrolle: $\frac{C^2}{\frac{As}{Vm} \cdot m} = \frac{(As)^2}{\frac{As}{V}} = \frac{As}{\frac{1}{V}} = VAs = J$

2.0 Zwei Massenpunkte mit den Massen $m_1 = m_2 = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\,kg$ tragen die Ladungen $Q_1 = 1{,}00 \cdot 10^{-13}\,C$ und Q_2.

2.1 Wie groß muss Q_2 sein, damit sich Gravitationskraft und elektrische Kraft gegenseitig aufheben?

$$F_C = F_{Gr}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

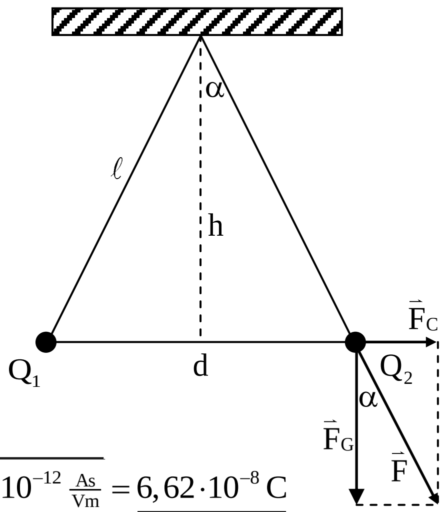
$$Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{Q_1}$$

$$Q_2 = 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{As}{Vm} \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\tfrac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{\left(1{,}00 \cdot 10^{-3}\,kg\right)^2}{1{,}00 \cdot 10^{-13}\,C} = \underline{\underline{7{,}42 \cdot 10^{-14}\,C}}$$

2.2 Für welchen Abstand gilt dieses Kräftegleichgewicht?

Das Kräftegleichgewicht gilt für jeden Abstand (r kürzt sich raus!)

3. Zwei Kugeln mit den Massen $m_1 = m_2 = 1,00 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}$ sind an Fäden mit je der Länge $\ell = 1,00\,\text{m}$ an einem gemeinsamen Aufhängepunkt befestigt. Sie tragen dieselbe elektrische Ladungsmenge gleichen Vorzeichens. Die Kugeln haben wegen der elektrostatischen Abstoßung den Abstand $d = 0,200\,\text{m}$ voneinander. Berechnen Sie den Betrag der sich auf den Kugeln befindenden Ladungsmenge!



Es gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{\ell} = \frac{d}{2\ell} = \frac{0,20\,\text{m}}{2\cdot 1,00\,\text{m}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5,74°$$

Außerdem gilt:

$$\tan\alpha = \frac{F_C}{F_G} \quad \Rightarrow \quad F_C = F_G \cdot \tan\alpha = mg \cdot \tan\alpha$$

$$F_C = 1,00 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 9,81\,\tfrac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \tan(5,74°) = 9,86 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$$

Aus $F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{d^2}$ folgt nun:

$$Q = \sqrt{F_C d^2 4\pi\varepsilon_0} = \sqrt{9,86 \cdot 10^{-4}\,\text{N} \cdot (0,200\,\text{m})^2 \cdot 4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{\text{As}}{\text{Vm}}} = \underline{\underline{6,62 \cdot 10^{-8}\,\text{C}}}$$

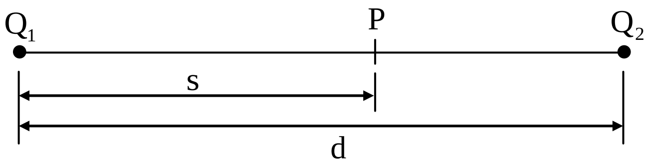
Oder:

$$\frac{F_C}{F_G} = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad F_C = F_G \cdot \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{d^2} = m \cdot g \cdot \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \quad Q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 d^2 mg \cdot \tan\alpha}$$

$$Q = \sqrt{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{\text{AS}}{\text{Vm}} \cdot (0,20\,\text{m})^2 \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 9,81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \tan 5,74°}$$

4. Gegeben sind zwei positive Ladungen $Q_1 = 8{,}5\,\text{nC}$ und $Q_2 = 5{,}5\,\text{nC}$. Auf der Verbindungstrecke der beiden Ladungen befindet sich im Abstand $s = 10{,}0\,\text{cm}$ von der Ladung Q_1 ein Punkt P, in dem die elektrische Feldstärke null ist.
Berechnen Sie den Abstand der beiden Punktladungen.



$$F_{Q_1P} = F_{Q_2P}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q_P}{s^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_2Q_P}{(d-s)^2}$$

$$\frac{Q_1}{s^2} = \frac{Q_2}{(d-s)^2}$$

$$(d-s)^2 = \frac{Q_2}{Q_1}\cdot s^2$$

$$d-s = \pm\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\cdot s$$

$$d = s \pm \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\cdot s$$

$$d = s\left(1 \pm \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)$$

$$d = 10\,\text{cm}\cdot\left(1 \pm \sqrt{\frac{5{,}5\,\text{nC}}{8{,}5\,\text{nC}}}\right) = \begin{cases} 18\,\text{cm} \\ (2{,}0\,\text{cm})\ \text{nicht sinnvoll, da } d > s \end{cases}$$

1996 Aufgabe III

1.0 Die Abhängigkeit des Betrags der Coulombkraft $\vec{F}_C$ von den Punktladungen Q_1, Q_2 und ihrem Abstand r im Vakuum wird durch das Coulombgesetz

$$\left|\vec{F}_C\right| = F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|Q_1\cdot Q_2|}{r^2}$$

erfasst, wobei $\varepsilon_0 =$ elektrische Feldkonstante.

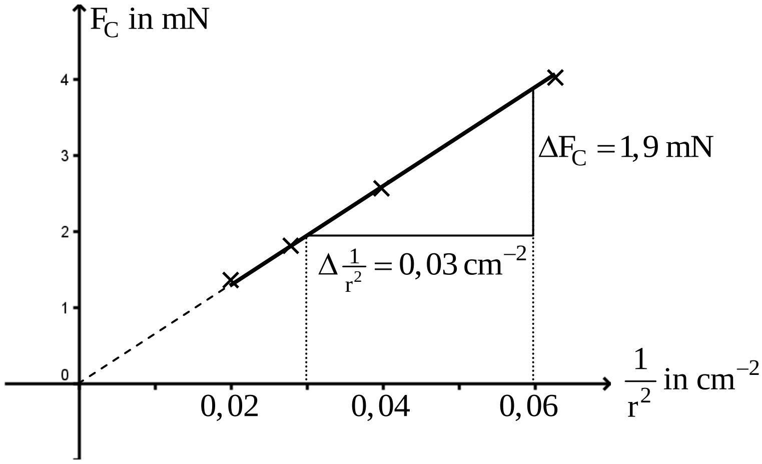
1.1 Beschreiben Sie anhand einer beschrifteten Skizze einen geeigneten Versuchsaufbau, mit dem die Abhängigkeit des Betrags der Coulombkraft F_C vom Abstand r untersucht wird.

1.2.0 Im Versuch 1.1 ergibt sich für $Q_1 = Q_2 = 27\,\text{nC}$ die folgende Messreihe:

Messung Nr.	1	2	3	4
r in cm	4,0	5,0	6,0	7,0
F_C in mN	4,0	2,6	1,8	1,4

1.2.1 Ermitteln Sie durch graphische Auswertung der Messreihe die Abhängigkeit des Betrags der Kraft F_C vom Abstand r.

Messung Nr.	1	2	3	4
r in cm	4,0	5,0	6,0	7,0
F_C in mN	4,0	2,6	1,8	1,4
$\frac{1}{r^2}$ in cm^{-2}	0,063	0,04	0,028	0,020



Im Rahmen der Mess- und Zeichengenauigkeit liegen die Messwerte auf einer Ursprungshalbgeraden. Somit folgt: $F_C \sim \frac{1}{r^2}$

1.2.2 Geben Sie diese Abhängigkeit in Form einer Gleichung an, und bestimmen Sie die auftretende Proportionalitätskonstante k mit Hilfe des Diagramms von Aufgabe 1.2.1.

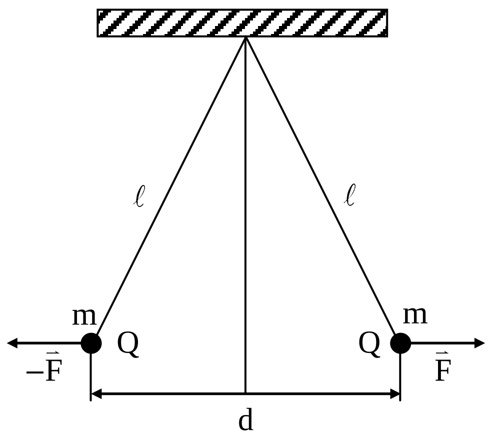
Es gilt: $F_C = k \cdot \frac{1}{r^2}$

mit $k = \frac{\Delta F_C}{\Delta\frac{1}{r^2}} = \frac{1{,}9\,mN}{0{,}03\,cm^{-2}} = 6{,}3\,mN \cdot cm^2 = 63{,}\bar{3} \cdot 10^{-3}\,N \cdot 10^{-4}\,m^2 = 6{,}3 \cdot 10^{-6}\,Nm^2$

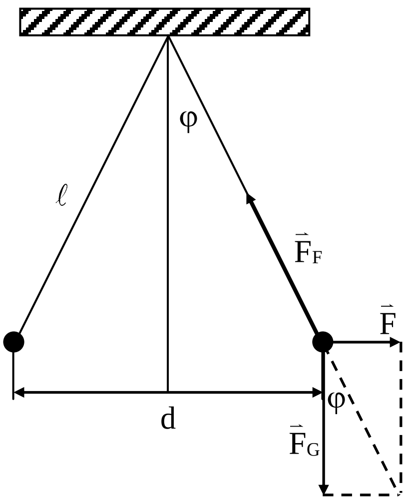
1.2.3 Berechnen Sie aus der Konstanten k die elektrische Feldkonstante.

Es gilt: $k = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi k} = \frac{27 \cdot 10^{-9}\,C \cdot 27 \cdot 10^{-9}\,C}{4\pi \cdot 6{,}3 \cdot 10^{-6}\,Nm^2} = 9{,}2 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}$

1.3.0 Im Vakuum befinden sich zwei identische Metallkugeln (Masse $m = 0{,}50\,g$), welche die gleiche Ladung Q tragen. Sie sind an zwei gleich langen Fäden (Pendellänge $\ell = 1{,}00\,m$) befestigt und an demselben Aufhängepunkt angebracht. Auf die geladenen Kugeln wirkt unter anderem die Abstoßungskraft $\vec{F}$ bzw. $-\vec{F}$.
In der Gleichgewichtslage beträgt der Mittelpunktsabstand der Kugeln $d = 16\,cm$ (s. Skizze). Die Abmessungen der Kugeln sind zu vernachlässigen.



1.3.1 Berechnen Sie – ausgehend von einem Kräfteplan, der die auf eine geladene Metallkugel einwirkenden Kräfte enthält – den Betrag der Abstoßungskraft $\vec{F}$ bzw. $-\vec{F}$.
$\left[\text{Ergebnis}: F = 0{,}39\,\text{mN}\right]$



Es gilt:

$$\sin\varphi = \frac{\frac{d}{2}}{\ell} = \frac{d}{2\ell} = \frac{0{,}16\,\text{m}}{2\cdot 1{,}00\,\text{m}} \quad\Rightarrow\quad \varphi = 4{,}6°$$

Außerdem gilt:

$$\tan\varphi = \frac{F_C}{F_G} \quad\Rightarrow\quad F_C = F_G \cdot \tan\varphi = mg \cdot \tan\varphi$$

$$F_C = 0{,}50\cdot 10^{-3}\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\tfrac{\text{N}}{\text{kg}}\cdot \tan\left(4{,}6°\right) = 0{,}39\,\text{mN}$$

1.3.2 Berechnen Sie den Betrag der Ladung, die eine der beiden Kugeln trägt.

Aus $F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{d^2}$ folgt nun:

$$Q = \sqrt{F_C d^2 4\pi\varepsilon_0} = \sqrt{3{,}9\cdot 10^{-4}\,\text{N}\cdot\left(0{,}16\,\text{m}\right)^2\cdot 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\tfrac{\text{AS}}{\text{Vm}}} = \underline{\underline{3{,}3\cdot 10^{-8}\,\text{C}}}$$