§ 10 Gravitation

Aufgaben:

1. Überprüfe die Gültigkeit des 3. Kepler´schen Gesetzes anhand der Daten folgender Tabelle

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter
Umlaufzeit T in d	87,97	224,70	365,26	686,98	4332,7
„Radius“ in 10^6 km	57,91	108,2	149,6	227,94	778,33
$C_S = \frac{T^2}{r^3}$ in $10^{-19}\,\frac{s^2}{m^3}$	2,97	2,98	2,97	2,98	2,97

Die Keplerkonstante C_S *ist für alle Planeten in unserem Sonnensystem gleich groß.*

2. Berechne die Umlaufdauer des Saturns, wenn dessen mittlerer Bahnradius $r_S = 9{,}54\ \text{AE}$ beträgt. ($1\ \text{AE}$ Astronomische Einheit ist die Entfernung der Erde von der Sonne und beträgt $149{,}6\cdot 10^6\ \text{km}$)

$$C_S = \frac{T^2}{r^3} \quad \Rightarrow \quad T^2 = C_S \cdot r^3$$

$$\Rightarrow \quad T = \sqrt{C_S \cdot r^3} = \sqrt{2{,}97\cdot 10^{-19}\,\tfrac{s^2}{m^3}\cdot\left(9{,}54\cdot 149{,}6\cdot 10^9\,\text{m}\right)^3} \approx 29{,}5\,\text{a}$$

3. Berechne die Bahngeschwindigkeit des Pluto, wenn seine Umlaufdauer $T = 248\,\text{a}$ beträgt.

$$C_S = \frac{T^2}{r^3} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{T^2}{C_S} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{C_S}}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\cdot r\cdot \pi}{T} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{T^2}{C_S}}\cdot\pi}{T} = \frac{2\cdot\pi}{\sqrt[3]{T\cdot C_S}}$$

$$v = \frac{2\cdot\pi}{\sqrt[3]{248\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,\text{s}\cdot 2{,}97\cdot 10^{-19}\,\frac{s^2}{m^3}}} \approx 4{,}74\,\tfrac{\text{km}}{\text{s}}$$

4. Ein Wettersatellit soll die Erde in einem Tag genau 12-mal umkreisen. In welcher Höhe muss er fliegen?
   $\left(1{,}69\cdot 10^3\,\text{km}\right)$

5. Welche Geschwindigkeit muss eine Mondfähre habe, wenn sie den Mond nahe der Mondoberfläche umkreisen soll?
   $\left(1{,}68\,\tfrac{\text{km}}{\text{s}}\right)$

6.0 Während der Mondlandung der Landefähre umkreiste der Kommandoteil von Apollo 11 den Mond mit der Geschwindigkeit $1{,}63\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ im Abstand $110\,\text{km}$ von der Mondoberfläche.

6.1 Berechne die Masse und die Dichte des Mondes.

$\left(7{,}37\cdot 10^{22}\,\text{kg}\,;\;\; 3{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$

6.2 Berechne die Höhe über dem Mondboden, in der die Gravitationskraft nur noch halb so groß ist wie an der Mondoberfläche.

$\left(720\,\text{km}\right)$

7.0 Bei gewissen Neutronensternen (Sternüberreste aus extrem verdichteter Materie) konnte nachgewiesen werden, dass sie in einer Zeit von $T = 1{,}0\,\text{s}$ ein Mal um ihre Achse rotieren.

7.1 Berechnen Sie, welche Dichte ein solcher Stern mindestens haben muss, damit die Materie an seiner Oberfläche bei dieser schnellen Rotation nicht davonfliegt.

Es gilt:

$$F_Z = F_{Gr}$$

$$m\omega^2 r = G\,\frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\,r = G\,\frac{M}{r^2}$$

außerdem gilt für die Dichte des Planeten: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}r^3\pi} \quad\Rightarrow\quad M = \frac{4}{3}r^3\pi\cdot\rho$

nun oben wieder eingesetzt:

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\,r = G\,\frac{\frac{4}{3}r^3\pi\cdot\rho}{r^2}$$

$$\frac{\pi}{T^2} = G\cdot\frac{1}{3}\cdot\rho$$

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

$$\rho = \frac{3\pi}{6{,}673\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot\left(1{,}0\,\text{s}\right)^2} = 1{,}4\cdot 10^{11}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

8.0 Im Jahr 1999 wurde der Kleinplanet „Ida“ entdeckt. Seine Abmessungen betragen ca. $56\,\text{km}\cdot 24\,\text{km}\cdot 21\,\text{km}$. Er wird von einem winzigen kugelförmigen Mond (Durchmesser $d_M = 1{,}5\,\text{km}$) in einer Entfernung von $R = 100\,\text{km}$ mit einer Umlaufzeit von $T = 22\,\text{h}$ umrundet.

8.1 Berechnen Sie die Dichte des Kleinplaneten Ida und vergleichen Sie diese mit der Dichte des Mondes. Was lässt sich daraus folgern!?

Es gilt:

$$F_Z = F_{Gr}$$

$$m\omega^2 r = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = G\frac{M}{r^2}$$

außerdem gilt für die Dichte des Planeten: $\rho = \frac{M}{V} \quad \Rightarrow \quad M = V\cdot\rho$

nun oben wieder eingesetzt:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = G\frac{V\cdot\rho}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r^3 = G\cdot V\cdot\rho$$

$$\rho = \frac{4\pi^2\cdot r^3}{VGT^2}$$

$$\rho = \frac{4\pi^2\cdot\left(100\cdot 10^3\,\text{m}\right)^3}{\left(56\cdot 10^3\,\text{m}\cdot 24\cdot 10^3\,\text{m}\cdot 21\cdot 10^3\,\text{m}\right)\cdot 6{,}673\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot\left(22\cdot 3600\,\text{s}\right)^2} = 3{,}3\cdot 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

9.0 Astronomen gehen heute davon aus, dass sich im Zentrum unserer Milchstraße ein schwarzes Loch befindet. Einer Forschungsgruppe gelang es, einen Stern auszumachen, der in einer Zeit von $T = 15\,\text{a}$ um dieses Zentrum kreist. Die große Halbachse seiner Umlaufbahn beträgt in etwa $d = 0{,}013\,\text{LJ}$ (Lichtjahre).

9.1 Berechnen Sie aus den Bahndaten dieses Sterns die Masse des schwarzen Lochs und vergleichen Sie diese mit unserer Sonnenmasse.

10.0 Im Frühjahr 2000 startete für 5 Jahre das Champ-Projekt. Ziel dieses Projektes ist es, mittels Satelliten die Geoidform der Erde auf einige Zentimeter genau zu bestimmen. Gleichzeitig werden auch Messungen zum Gravitations- und Magnetfeld sowie zum elektrischen Feld der Erde durchgeführt. Zu Beginn der Messungen wird der Satellit in eine Höhe von $h_1 = 470\,\text{km}$ über der Erdoberfläche gebracht.

10.1 Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit v_1 des Satelliten in der Höhe h_1.

10.2 Ermitteln Sie die Zeit T_1, die der Satellit für eine volle Umkreisung der Erde benötigt.

10.3.0 Durch die Reibung an der dünnen Atmosphäre verliert der Champ-Satellit immer mehr an Höhe. Dieser Höhenverlust schadet dem Projekt allerdings nicht. Nach 5 Jahren hat der Satellit immer noch eine Höhe von $h_2 = 300\,\text{km}$.

10.3.1 Berechnen Sie für die neue Bahn die Bahngeschwindigkeit v_2 und die Umlaufzeit T_2.

10.3.2 Vergleichen Sie die beiden Bahngeschwindigkeiten und finden Sie eine Erklärung für dieses Phänomen.

11.0 Das Hubble-Space-Teleskop umkreist die Erde in einer mittleren Höhe von $h = 593\,km$.

11.1 Berechnen Sie die Zeit T_{sid} (siderische Umlaufzeit) für eine vollständige Umrundung der Erde.

11.2 Ein Beobachter erblickt senkrecht über sich das Hubble-Space-Teleskop. Berechnen Sie die Zeit T_{syn} (synodische Umlaufzeit), die verstreicht bis der Beobachter den Satelliten erneut senkrecht über sich erblickt.
Hinweis: Die Erde benötigt für eine 360°-Drehung um ihre Achse eine Zeit von $T_E = 86.164\,s$. Das Teleskop hat die gleiche Drehrichtung wie die Erde und der Beobachter befindet sich in der Kreisbahnebene des Satelliten.