2004 Aufgabe 2 (Lösung)

1.0 Astronauten verlassen an Bord eines Raumschiffes die Erde und fliegen zum Mond. Das Raumschiff wird auf eine Kreisbahn um den Mond in der Höhe $h_1 = 110\,\text{km}$ über der Mondoberfläche gelenkt. Auf dieser Kreisbahn bewegt sich das Raumschiff antriebslos. Die Masse des Mondes beträgt $m_M = 7{,}35\cdot 10^{22}\,\text{kg}$, der Mondradius $r_M = 1{,}738\cdot 10^{6}\,\text{m}$ und die Gravitationskonstante $G = 6{,}673\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}$.

1.1 Zeigen Sie mit Hilfe des Gravitationsgesetzes, dass für den Betrag v_1 der Bahngeschwindigkeit des Raumschiffes gilt:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\cdot m_M}{r_M + h_1}}$$

Berechnen Sie v_1.

$$F_Z = F_{Gr}$$

$$m_R \cdot \frac{v_1^2}{r} = G\cdot\frac{m_M \cdot m_R}{r^2}$$

$$v_1^2 = G\cdot\frac{m_M}{r}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\cdot m_M}{r}} \quad \text{mit } r = r_M + h_1$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\cdot m_M}{r_M + h_1}}$$

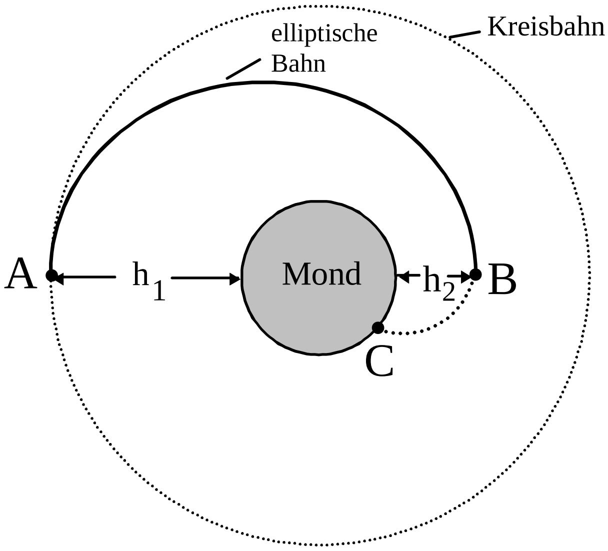
$$v_1 = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\,\text{kg}}{1{,}738\cdot 10^{6}\,\text{m} + 1{,}10\cdot 10^{5}\,\text{m}}} \approx 1{,}63\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

1.2 Berechnen Sie die Umlaufdauer T_1 des Raumschiffes.
$[\text{Ergebnis}: T_1 = 1{,}98\,\text{h}]$

$$v = \frac{s}{t} \;\Rightarrow\; v_1 = \frac{2\pi(r_M + h_1)}{T_1} \;\Rightarrow\; T_1 = \frac{2\pi(r_M + h_1)}{v_1}$$

$$T_1 = \frac{2\pi(r_M + h_1)}{v_1} = \frac{2\pi\left(1{,}738\cdot 10^{6}\,\text{m} + 1{,}10\cdot 10^{5}\,\text{m}\right)}{1{,}63\cdot 10^{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 1{,}98\,\text{h}$$

1.3.0 Die Landefähre wird vom Kommandoteil des Raumschiffes abgekoppelt. Durch ein Steuermanöver wird die Landefähre von der Kreisbahn auf eine elliptische Bahn gelenkt. Zwischen dem mondfernsten Punkt A und dem mondnächsten Punkt B dieser elliptischen Bahn bewegt sich die Landefähre antriebslos. Im Punkt B befindet sich die Landefähre in der Höhe $h_2 = 14{,}6\,\text{km}$ über der Mondoberfläche. Siehe nebenstehende nicht maßstabsgetreue Skizze.



1.3.1 Berechnen Sie die große Halbachse der elliptischen Bahn und die Dauer des Fluges von A nach B.

Für die große Bahnhalbachse gilt:

$$2a = h_1 + 2r_M + h_2 \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{2}\left(h_1 + h_2\right) + r_M$$

$$a = \tfrac{1}{2}\left(1{,}10\cdot 10^5\,\text{m} + 1{,}46\cdot 10^4\,\text{m}\right) + 1{,}738\cdot 10^6\,\text{m} \approx 1{,}80\cdot 10^6\,\text{m}$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz gilt:

$$\frac{T_L^2}{a^3} = \frac{T_1^2}{\left(r_M + h_1\right)^3} \quad \Rightarrow \quad T_L^2 = \frac{a^3\cdot T_1^2}{\left(r_M + h_1\right)^3} \quad \Rightarrow \quad T_L = T_1\cdot\sqrt{\frac{a^3}{\left(r_M + h_1\right)^3}}$$

Für den Flug von A nach B benötigt das Landeteil eine Zeit von:

$$t_L = \tfrac{1}{2}\cdot T_L = \tfrac{1}{2}\cdot 1{,}98\,\text{h}\cdot\sqrt{\frac{\left(1{,}80\cdot 10^6\,\text{m}\right)^3}{\left(1{,}738\cdot 10^6\,\text{m} + 1{,}10\cdot 10^5\,\text{m}\right)^3}} \approx 0{,}952\,\text{h} \quad \left(57{,}1\,\text{min}\right)$$

1.3.2 Im Punkt B (siehe Skizze) leitet ein weiteres Steuermanöver die Landung auf der Mondoberfläche ein. Die Landefähre wird zunächst abgebremst. Dabei werden pro Sekunde Verbrennungsgase der Masse $m_{Gas} = 45\,\text{kg}$ in Bewegungsrichtung der Landefähre mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $2{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ gegenüber der Fähre ausgestoßen.
Berechnen Sie den Betrag der Bremskraft, die durch den Ausstoß der Verbrennungsgase auf die Landefähre ausgeübt wird.
Erläutern Sie Ihren Lösungsansatz.

Werden Verbrennungsgase ausgestoßen so kommt es zu einer Impulsänderung $m_{Gas}\cdot\Delta v_{Gas}$. Dadurch erfährt die Landefähre den Kraftstoß $F_{Brems}\cdot\Delta t$.
Somit gilt:

$$F_{Brems}\cdot\Delta t = m_{Gas}\cdot\Delta v_{Gas}$$

$$F_{Brems} = m_{Gas}\cdot\frac{\Delta v_{Gas}}{\Delta t} = 45\,\text{kg}\cdot\frac{2{,}5\cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}0\,\text{s}} \approx 1{,}1\cdot 10^5\,\text{N}$$

1.3.3 Die Mondlandung ist gelungen. Die Astronauten verlassen die Landefähre und betreten die Mondoberfläche. Die Masse eines der Astronauten einschließlich seiner Ausrüstung beträgt $m_A = 135\,\text{kg}$.

Berechnen Sie unter Verwendung der für den Mond in 1.0 angegebenen Daten den Betrag der Gewichtskraft, die auf den Astronauten mit Ausrüstung wirkt.

Es gilt:

$$F_G = G \cdot \frac{m_M \cdot m_A}{r_M^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\tfrac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\,\text{kg} \cdot 135\,\text{kg}}{\left(1{,}738 \cdot 10^6\,\text{m}\right)^2} \approx 219\,\text{N}$$