2001 A III Lösung

1.0 Die Raumfahrtbehörden planen für dieses Jahrhundert einen bemannten Raumflug zum Mars. Dabei soll ein Raumschiff auf eine Marsumlaufbahn gelenkt werden.

1.1 Für alle Körper, die sich antriebslos auf einer Kreisbahn mit dem Radius r und der Umlaufdauer T um ein Zentralgestirn bewegen, gilt das dritte Kepler´sche Gesetz $\frac{T^2}{r^3} = C$, wobei C eine Konstante ist.
Zeigen Sie mithilfe des Gravitationsgesetzes, dass der Wert der Konstanten C nur von der Masse m_Z des Zentralgestirns abhängig ist.

$$F_{Gr} = F_Z$$

$$G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{r^2} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$G \cdot \frac{m_Z}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2}{G \cdot m_Z}}_{C} \cdot r^3$$

Somit gilt: $C = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_Z}$

Die (Kepler-) Konstante C hängt nur von der Masse m_Z des Zentralgestirns ab.

1.2.0 Masse und Durchmesser des Planeten Mars betragen $m_M = 6,40 \cdot 10^{23}\,\text{kg}$ und $d_M = 6,79 \cdot 10^6\,\text{m}$.

1.2.1 Berechnen Sie die Konstante C_M des dritten Kepler´schen Gesetzes für Körper, deren Umlaufbahn den Mars zum Zentralgestirn haben.

$$C_M = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_Z} = \frac{4\pi^2}{6,673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 6,40 \cdot 10^{23}\,\text{kg}} = 9,24 \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

1.2.2 Bestimmen Sie den Betrag der Gravitationsfeldstärke a der Marsoberfläche.

Die Gravitationsfeldstärke a an der Marsoberfläche entspricht dem Ortsfaktor g_M. Für diesen gilt:

$$F_G = F_{Gr}$$

$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m_M \cdot m}{r_M^2}$$

$$g_M = G \cdot \frac{m_M}{r_M^2}$$

$$g_M = 6,673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{6,40 \cdot 10^{23}\,\text{kg}}{\left(\frac{1}{2} \cdot 6,79 \cdot 10^6\,\text{m}\right)^2} = 3,71\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

1.3.0 Im folgenden wird eine fiktive Marsmission betrachtet.
Ein Raumschiff mit drei Astronauten an Bord ist auf eine Marsumlaufbahn eingeschwenkt. Zwei Astronauten steigen vom Kommandoteil des Raumschiffs in die Landefähre um. Die Landefähre wird vom Kommandoteil abgekoppelt. Den beiden Astronauten gelinkt es, auf der Marsoberfläche zu landen.
Der dritte Astronaut bleibt im Kommandoteil des Raumschiffs zurück. Das Kommandoteil umrundet antriebslos den Mars auf einer Kreisbahn in der Höhe h über der Marsoberfläche.
Die Umlaufdauer beträgt $T_K = 119\,\text{min}$.

1.3.1 Berechnen Sie die Höhe h und den Betrag der Bahngeschwindigkeit des Kommandoteils.

Nach 1.1 gilt: $\frac{T_k^2}{r_K^3} = C_M \quad \Rightarrow \quad r_K^3 = \frac{T_k^2}{C_M} \quad \Rightarrow \quad r_K = \sqrt[3]{\frac{T_k^2}{C_M}}$

$$r_K = \sqrt[3]{\frac{(119 \cdot 60\,\text{s})^2}{9{,}24 \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}}} = 3{,}807 \cdot 10^6\,\text{m}$$

Für die Höhe h_K über der Marsoberfläche gilt dann:

$$h_K = r_K - r_M = 3{,}807 \cdot 10^6\,\text{m} - \tfrac{1}{2} \cdot 6{,}79 \cdot 10^6\,\text{m} = 4{,}12 \cdot 10^5\,\text{m}$$

Für den Betrag der Bahngeschwindigkeit folgt nun:

$$v = \frac{s}{T_K} = \frac{2\pi \cdot r_K}{T_K} = \frac{2\pi \cdot 3{,}807 \cdot 10^6\,\text{m}}{119 \cdot 60\,\text{s}} = 3{,}35 \cdot 10^3\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.3.2 Kurz vor dem Aufsetzen auf der Marsoberfläche wird die Landefähre (Masse $m_L = 2{,}40\,\text{t}$) durch Ausstoß von Treibgas in einen Schwebezustand versetzt, damit sie nicht hart aufschlägt.
Berechnen Sie den Betrag der dazu nötigen Schubkraft $\vec{F}_S$.

Unmittelbar vor dem Aufsetzen muss die Schubkraft der Landefähre gerade ihre Gewichtskraft an der Oberfläche des Mars kompensieren. Da die beiden Kräfte gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet sind gilt also für den Betrag der Schubkraft:

$$F_S = F_G = m_L \cdot g_M = 2{,}40 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 3{,}71\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8{,}90 \cdot 10^3\,\text{N}$$

1.3.3 Der Landeplatz liegt am Marsäquator. Der Mars rotiert um die eigene Achse mit der Umdrehungsdauer $T_M = 1{,}026\,\text{d}$. Die Umlaufbahn des Kommandoteils liegt in der Äquatorebene des Mars. Umlaufsinn des Kommandoteils und Umdrehungssinn des Mars stimmen überein.
Einer der beiden Astronauten, die sich am Marsäquator aufhalten, sieht soeben durch ein vertikal nach oben ausgerichtetes Fernrohr das Kommandoteil des Raumschiffs.
Ermitteln Sie durch Rechnung, wie lange es dauert, bis das Kommandoteil das nächste Mal im weiterhin vertikal nach oben ausgerichteten Fernrohr zu erkennen ist.

In diesem Fall hat das Kommandoteil eine Umdrehung mehr als das auf dem Mars sich befindende Landeteil ausgeführt. Somit gilt für die Differenz der beiden Drehwinkel:

$$\rho_K - \rho_L = 2\pi$$

Mit $\rho = \omega \cdot t$ folgt dann:

$$\omega_K \cdot t - \omega_L \cdot t = 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{T_K} \cdot t - \frac{2\pi}{T_L} \cdot t = 2\pi$$

$$2\pi \cdot t \left(\frac{1}{T_K} - \frac{1}{T_L} \right) = 2\pi$$

$$t \left(\frac{1}{T_K} - \frac{1}{T_L} \right) = 1$$

$$t = \frac{1}{\frac{1}{T_K} - \frac{1}{T_L}}$$

$$t = \frac{1}{\frac{1}{119\,\mathrm{min}} - \frac{1}{1{,}026 \cdot 24 \cdot 60\,\mathrm{min}}} = 129\,\mathrm{min}$$