## 1997 Aufgabe 2

1.0 Die Raumsonde Viking 1 und die beiden Marsmonde Phobos und Deimos umrunden im Juli 1976 auf Kreisbahnen den Planeten Mars in dessen Äquatorebene. Viking 1 bewegt sich antriebslos. Im folgenden sind Marsatmosphäre und Einflüsse anderer Himmelskörper zu vernachlässigen. Im Abhängigkeit vom Mittelpunktsabstand r zwischen dem Mars und Viking 1 bzw. zwischen dem Mars und den Monden ergeben sich die Umlaufperioden T.

| Kreisbahn | Viking 1 | Phobos | Deimos |
|---|---|---|---|
| r in $10^6$ m | 5,14 | 9,37 | 23,52 |
| T in d (Tage) | 0,130 | 0,319 | 1,262 |

1.1 Zeigen Sie durch rechnerische Auswertung der Messdaten aus 1.0, dass die Gleichung $T^2 = C_M \cdot r^3$ gilt, wobei $C_M$ eine Konstante ist.

$$T^2 = C_M \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad C_M = \frac{T^2}{r^3}$$

Viking 1: $C_M = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(0{,}130 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s})^2}{(5{,}14 \cdot 10^6\,\text{m})^3} = 9{,}29 \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$

Phobos: $C_M = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(0{,}319 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s})^2}{(9{,}37 \cdot 10^6\,\text{m})^3} = 9{,}23 \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$

Deimos: $C_M = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(1{,}262 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s})^2}{(23{,}52 \cdot 10^6\,\text{m})^3} = 9{,}14 \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$

Im Rahmen der Messgenauigkeit gilt: $\frac{T^2}{r^3} = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = k \quad \text{mit } k = C_M$.

1.2 Bestätigen Sie – ausgehend vom Gravitationsgesetz – die Gleichung aus 1.1 durch allgemeine Herleitung, und berechnen Sie mit Hilfe der Konstanten $C_M = 1{,}24 \cdot 10^{-22}\,\frac{\text{d}^2}{\text{m}^3}$ die Marsmasse.

$$F_{Gr} = F_Z$$

$$G \cdot \frac{m_M \cdot m}{r^2} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$G \cdot \frac{m_M}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2}{G \cdot m_M}}_{C_M} \cdot r^3$$

$$C_M = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_M} \quad \Rightarrow \quad m_M = \frac{4\pi^2}{G \cdot C_M} = \frac{4\pi^2}{6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1{,}24 \cdot 10^{-22}\,\frac{d^2}{m^3}}$$

$$m_M = \frac{4\pi^2}{6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1{,}24 \cdot 10^{-22}\,\frac{(24 \cdot 3600\,s)^2}{m^3}} = 6{,}39 \cdot 10^{23}\,kg$$

1.3.0 Viking 1 (Masse $m_V = 2{,}33 \cdot 10^3\,kg$) landet weich auf dem Äquator des Mars (Masse $m_M = 6{,}39 \cdot 10^{23}\,kg$). Der Mars besitzt eine Eigenrotation, die Rotationsperiode beträgt $T_M = 24{,}62\,h$. Um den Marsradius zu bestätigen, wird dort der freie Fall eines Körpers K der Masse $0{,}050\,kg$ untersucht. Bei diesem Experiment benötigt K für die Fallstrecke $2{,}30\,m$ die Zeitspanne $1{,}11\,s$.

1.3.1 Berechnen Sie unter Verwendung der Daten aus 1.3.0 den Betrag der Fallbeschleunigung auf der Marsoberfläche, und berechnen Sie den Marsradius $r_M$.
$\left[\text{Teilergebnis}: r_M = 3{,}38 \cdot 10^6\,m\right]$

Es gilt: $h(t) = h_0 - \frac{1}{2} g_M \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad h(t_F) = h_0 - \frac{1}{2} g_M \cdot t_F^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_M = \frac{2h_0}{t_F^2}$

$$g_M = \frac{2 \cdot 2{,}30\,m}{(1{,}11\,s)^2} = 3{,}73\,\frac{m}{s^2}$$

$$F_G = F_{Gr}$$

$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m_M \cdot m}{r_M^2}$$

$$r_M^2 = G \cdot \frac{m_M}{g_M}$$

$$r_M = \sqrt{G \cdot \frac{m_M}{g_M}}$$

$$r_M = \sqrt{6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{6{,}39 \cdot 10^{23}\,kg}{3{,}73\,\frac{m}{s^2}}} = 3{,}38 \cdot 10^6\,m$$

1.3.2 Viking 1 ruht auf dem Äquator des Mars und besitzt aufgrund der Marsrotation kinetische Energie. Berechnen Sie diese kinetische Energie.

Für die Geschwindigkeit am Äquator gilt: $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi \cdot r_M}{T_M}$

Somit folgt für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_V \cdot v_V^2 = \frac{1}{2} m_V \cdot \left(\frac{2\pi \cdot r_M}{T_M}\right)^2 = \frac{1}{2} m_V \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r_M^2}{T_M^2}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}33 \cdot 10^3\,kg \cdot \frac{4\pi^2 \cdot (3{,}38 \cdot 10^6\,m)^2}{(24{,}62 \cdot 3600\,s)^2} = 6{,}69 \cdot 10^7\,J$$

1.4.0 Die Raumsonde Viking 1 soll den Mars wieder verlassen und zunächst auf die Synchronbahn um den Mars gebracht werden. Dort steht Viking 1 über einem Punkt des Marsäquators scheinbar still. Es wird unterstellt, dass die Masse von Viking 1 während des Manövers konstant bleibt.

1.4.1 Berechnen Sie den Synchronbahnradius $r_S$.

$\left[\text{Ergebnis}: r_S = 20{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}\right]$

Aus $T^2 = C_M \cdot r^3$ folgt: $r^3 = \frac{T^2}{C_M} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{C_M}}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(24{,}62 \cdot 3600\,\text{s})^2}{1{,}24 \cdot 10^{-22}\ \frac{(24 \cdot 3600\,\text{s})^2}{\text{m}^3}}} = 2{,}04 \cdot 10^7\ \text{m}$$