1987 Aufgabe 3

1.0 Ein Raumschiff nähert sich unserem Nachbarplaneten Mars, dessen Radius $r_M = 3{,}43 \cdot 10^6\,\text{m}$ beträgt.
Der äußere Marsmond Deimos bewegt sich um den Mars auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r_D = 2{,}34 \cdot 10^7\,\text{m}$ und der Umlaufzeit $T_D = 30{,}3\,\text{h}$.

1.1 Berechnen Sie die das Gravitationsfeld des Mars kennzeichnende Konstante $k = \frac{T^2}{r^3}$.

$$k = \frac{(30{,}3 \cdot 3600\,\text{s})^2}{(2{,}34 \cdot 10^7\,\text{m})^3} = 9{,}29 \cdot 10^{-13}\,\tfrac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

1.2.0 Die Astronauten sollen auf eine „Parkbahn“ um den Mars einschwenken, die im folgenden als kreisförmig zu betrachten ist. Auf der Parkbahn bewegt sich das Raumschiff antriebslos. Einflüsse anderer Planeten werden vernachlässigt.

1.2.1 Zeigen Sie allgemein, dass für den Betrag der Bahngeschwindigkeit $\overrightarrow{v(r)}$ des Raumschiffs in Abhängigkeit vom Bahnradius r gilt:

$$v(r) = \frac{2\pi}{\sqrt{r \cdot k}}$$

$$k = \frac{T^2}{r^3} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{r^3 \cdot k} = r \cdot \sqrt{r \cdot k} \quad (1)$$

$$\frac{v}{r} = \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2\pi r}{T} \overset{(1)}{=} \frac{2\pi r}{r \cdot \sqrt{r \cdot k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{r \cdot k}} = v(r)$$

1.2.2 Berechnen Sie den Betrag der Bahngeschwindigkeit für die Umlaufbahn in der Höhe $h = 1{,}70\,r_M$ über der Marsoberfläche.

Mit $r = r_M + h = r_M + 1{,}70 r_M = 2{,}70 r_M$ folgt

$$v(r) = \frac{2\pi}{\sqrt{r \cdot k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2{,}7 r_M \cdot k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2{,}7 \cdot 3{,}43 \cdot 10^6\,\text{m} \cdot 9{,}29 \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}}} = 2{,}14\,\tfrac{\text{km}}{\text{s}}$$

1.2.3 Kann das Raumschiff den Mars antriebslos auf einer Bahn umkreisen, deren Ebene nicht den Massenmittelpunkt des Planeten enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein.

1.2.4 Begründen Sie ohne Rechnung, dass bei einem Umlauf des Raumschiffs auf einer Parkbahn keine Arbeit verrichtet wird.

Da der Richtungsvektor (Vektor längs der Tangente am Kreis!) der Bewegung stets auf dem Richtungsvektor (Vektor zum Kreismittelpunkt!) der Gravitationskraft senkrecht steht wird keine Arbeit verrichtet $\left(W = \vec{F} \circ \vec{s} = 0 \text{ da } \vec{F} \perp \vec{s}\right)$.

1.3 Bestimmen Sie mit den Angaben von 1.0 die Masse m_M des Mars.

$\left[\text{Ergebnis}: m_M = 6{,}37 \cdot 10^{23}\ \text{kg}\right]$

$$F_{Gr} = F_Z$$

$$G \cdot \frac{m_M \cdot m_D}{r_D^2} = m_D \cdot \omega^2 \cdot r_D$$

$$m_M = \frac{\omega^2 \cdot r_D^3}{G}$$

$$m_M = \frac{4\pi^2 \cdot r_D^3}{T^2 \cdot G}$$

$$m_M = \frac{4\pi^2 \cdot \left(2{,}34 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^3}{\left(30{,}3 \cdot 3600\,\text{s}\right)^2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}} = 6{,}37 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$