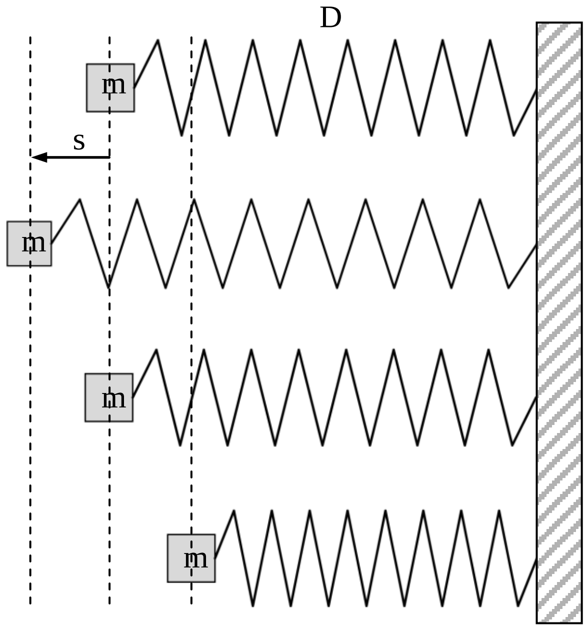
9.13 Der Energieerhaltungssatz bei der harmonischen Schwingung



Wird eine Feder um die Strecke s aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, so muss an dieser Arbeit verrichtet werden. Dazu ist eine Kraft nötig, die der Rückstellkraft entgegengesetzt gerichtet ist.

$$F_{Ausl.} = -F_R = Ds = Dx$$

Für die Verschiebearbeit folgt somit:

$$W_{0s} = \int_0^s Dx\,dx = \left[\tfrac{1}{2}Dx^2\right]_0^s = \tfrac{1}{2}Ds^2$$

Diese Arbeit ist nun in Form von potentieller Energie in der Feder gespeichert. Für die potentielle Energie der Feder gilt somit:

$$W_{0s} = \tfrac{1}{2}Ds^2 = \Delta E_{pot} = E_{pot(s)} - \underbrace{E_{pot(0)}}_{0} = E_{pot(s)}$$

also:

$$\boxed{E_{pot} = \tfrac{1}{2}Ds^2}$$

Lässt man die Feder nun los, so wird diese potentielle Energie kontinuierlich in kinetische Energie umgewandelt. Beim Durchgang durch die Ruhelage liegt ausschließlich kinetische und keine potentielle Energie mehr vor (E_{kin} ist maximal beim Durchgang durch die Ruhelage). Nach dem Durchgang durch die Ruhelage kehrt sich dieser Prozess wieder um, bis beim nächsten Umkehrpunkt die potentielle Energie wieder maximal ist und keine kinetische Energie mehr vorliegt.

Für die potentielle Energie gilt:

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2}Ds^2 = \tfrac{1}{2}D\left[A\sin\left(\omega t + \rho_0\right)\right]^2 = \tfrac{1}{2}DA^2\sin^2\left(\omega t + \rho_0\right)$$

Für die kinetische Energie gilt:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\left[A\omega\cos\left(\omega t + \rho_0\right)\right]^2 = \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\left(\omega t + \rho_0\right)$$

Vernachlässigt man nun die Reibung, dann muss wegen der Energieerhaltung die Summe aus potentieller und kinetischer Energie zu jedem beliebigen Zeitpunkt konstant sein.
Für die Gesamtenergie gilt:

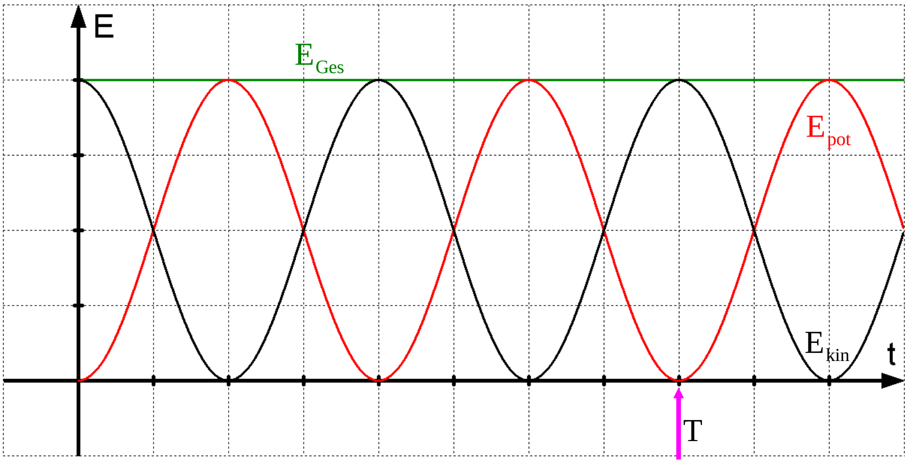
$$E_{Ges} = E_{pot} + E_{kin} = \tfrac{1}{2}DA^2\sin^2\left(\omega t + \rho_0\right) + \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\left(\omega t + \rho_0\right)$$

mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} = \sqrt{\dfrac{D}{m}}$ folgt dann:

$$E_{Ges} = \tfrac{1}{2}DA^2\sin^2\left(\omega t + \rho_0\right) + \tfrac{1}{2}DA^2\cos^2\left(\omega t + \rho_0\right) = \tfrac{1}{2}DA^2\underbrace{\left(\sin^2\left(\omega t + \rho_0\right) + \cos^2\left(\omega t + \rho_0\right)\right)}_{1}$$

$$\boxed{E_{Ges} = \tfrac{1}{2}DA^2}$$

Die graphische Darstellung der Schwingungsenergien in Abhängigkeit von der Zeit t (mit dem Phasenwinkel $\rho_0 = 0$) ist in folgendem Diagramm dargestellt.



An welcher Stelle ist in obigem Diagramm genau eine Periode verstrichen?

Wird die Schwingungsenergie eines harmonisch schwingenden Körpers nicht als Funktion der Zeit, sondern in Abhängigkeit von der Elongation des schwingenden Körpers gesucht. Dann gilt:

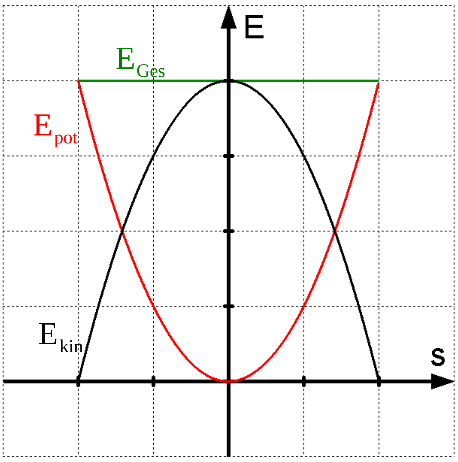
$$E_{Ges} = \tfrac{1}{2} DA^2 = \text{konst.}$$

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2} Ds^2$$

Aus der Energieerhaltung folgt dann:

$$E_{kin} = E_{Ges} - E_{pot} = \tfrac{1}{2} DA^2 - \tfrac{1}{2} Ds^2 = \tfrac{1}{2} D\left(A^2 - s^2\right)$$

Die graphische Darstellung der Schwingungsenergien in Abhängigkeit von der Elongation s ist im rechten Diagramm dargestellt.



Aufgaben:

1.0 Die schwingende Masse eines Federpendels beträgt $m = 430\,\text{g}$. Die Amplitude des Pendelkörpers beträgt $A = 8,6\,\text{cm}$. 10 Schwingungen sind in $11\,\text{s}$ vollendet.

1.1 Berechne die Federkonstante!

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{D} \quad \Rightarrow \quad D = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{T^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{\left(\frac{t}{n}\right)^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{0,43\,\text{kg}}{\left(\frac{11\,\text{s}}{10}\right)^2} = 14\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}$$

1.2 Welche Energie wurde dem Pendel zu Beginn zugeführt?

$$E = \tfrac{1}{2} DA^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 14\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,086\,\text{m})^2 = 5,2 \cdot 10^{-2}\,\text{J}$$

1.3 Gib für die Geschwindigkeit des schwingenden Körpers eine Funktion der Zeit an, wenn zur Zeit $t = 0\,s$ der Körper seine maximale Elongation erreicht!

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega t + \rho_0) = 0{,}086\,m \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{1{,}1s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$v(t) = 0{,}086\,m \cdot \tfrac{2\pi}{1{,}1s} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{1{,}1s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}491\,\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{1{,}1s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

1.4 Berechne aus der Geschwindigkeit die maximale kinetische Energie!

$$v(t) = \underbrace{0{,}491\,\tfrac{m}{s}}_{v_{max}} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{1{,}1s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$E_{kin_{max}} = \tfrac{1}{2} m v_{max}^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}430\,kg \cdot \left(0{,}491\,\tfrac{m}{s}\right)^2 = 52\,mJ$$

1.5 Zeige, dass der Energieerhaltungssatz für jeden Zeitpunkt bei dieser harmonischen Schwingung erfüllt ist!

$$E_{Ges} = \tfrac{1}{2} DA^2 \sin^2(\omega t + \rho_0) + \tfrac{1}{2} DA^2 \cos^2(\omega t + \rho_0) = \tfrac{1}{2} DA^2 \underbrace{\left(\sin^2(\omega t + \rho_0) + \cos^2(\omega t + \rho_0)\right)}_{1}$$
$$E_{Ges} = \tfrac{1}{2} DA^2 = \text{konst.} \quad (\text{für alle } t)$$

2.0 Ein Körper der Masse $m = 520\,g$ schwingt harmonisch. Die Schwingungsdauer beträgt $T = 1{,}6\,s$ und die Amplitude $A = 14\,cm$.

2.1 Stelle die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Körpers als Funktion der Zeit dar! (Zur Zeit $t = 0\,s$ möge sich der Körper durch die Nulllage in positiver Richtung bewegen)

2.2 Stelle die drei Funktionen graphisch dar und erläutere daran den Begriff der Phasenverschiebung.

2.3 Welche Elongation hat der Körper zur Zeit $t = 0{,}20\,s$? Wann erreicht er nach $t = 0\,s$ zum erstenmal die Elongation $-10\,cm$?

2.4 Wie groß ist die gesamte Schwingungsenergie des Körpers?

2.5 Wie groß sind die kinetische und die potentielle Energie der Körpers zur Zeit $t = 0{,}20\,s$?

2.6 Zu welchem Zeitpunkt beträgt die potentielle Energie erstmals $4{,}5 \cdot 10^{-2}\,J$ (mit Herleitung von t)?

2.7 Wann wird diese Energie zum vierten mal erreicht?
$\left(9{,}9\,cm;\ 1{,}0\,s;\ 7{,}9 \cdot 10^{-2}\,J;\ 3{,}9 \cdot 10^{-2}\,J; 0{,}22\,s; 1{,}4\,s\right)$

3.0 Zwischen zwei Federn, die die gleiche Richtgröße D haben, ist eine Kugel K der Masse m so befestigt, dass sie waagrecht schwingen kann. Die anderen Enden der Federn sind fest. Die Kugel wird um den Betrag A nach links ausgelenkt und zur Zeit $t = 0\,s$ losgelassen. Sie möge jetzt in der positiven x-Richtung schwingen.

3.1 Wie groß ist die potentielle Energie des Systems im Zeitpunkt $t = 0\,s$?

3.2 Mit welcher Geschwindigkeit schwingt die Kugel durch die Nulllage?

3.3 Welche Eigenfrequenz hat das System?

3.4 Stelle das Weg-Zeit-Gesetz der schwingenden Kugel auf!

$$\left(DA^2;\ A\sqrt{\tfrac{2D}{m}};\ \tfrac{1}{2\pi}\sqrt{\tfrac{2D}{m}};\ s(t) = A\sin(\omega t - \tfrac{\pi}{2})\right)$$