9.7 Lineares Kraftgesetz

Bei einer Schwingung wirkt zu jedem Zeitpunkt eine Kraft, die die schwingende Masse immer wieder in ihre Ruhelage zurückzieht. Diese Kraft nennt man Rückstellkraft $\vec{F}_R$.
Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt allgemein:

$$\vec{F}_R(t) = \vec{F}_a(t) = m \cdot \vec{a}(t) \quad \Rightarrow \quad F_R(t) = m \cdot a(t)$$

mit

$$a(t) = \ddot{s}(t) = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \rho_0\right)$$

folgt:

$$F_R(t) = \underbrace{-m \cdot \omega^2}_{D=\text{konst.}} \cdot \underbrace{A \sin\left(\omega t + \rho_0\right)}_{y(t)\,\text{bzw.}\,s(t)}$$

und somit gilt:

$$\boxed{F_R(t) = -D \cdot s(t)} \qquad \text{Lineares Kraftgesetz}$$

Da die beschleunigende Kraft bei der harmonischen Schwingung der Elongation entgegengerichtet ist (Minuszeichen) nennt man sie Rückstellkraft.

$D = m\omega^2$ bezeichnet man als die Richtgröße des schwingenden Systems, es handelt sich dabei um eine Systemkonstante.

Aus

$$D = m\omega^2 = m\left(\tfrac{2\pi}{T}\right)^2 = m\tfrac{4\pi^2}{T^2}$$

folgt:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\tfrac{m}{D}}} \qquad \text{Schwingungsdauer}$$

Merke: Eine harmonische Schwingung ist genau dann harmonisch, wenn das lineare Kraftgesetz gilt.

$$\boxed{\text{harmonische Schwingung} \Leftrightarrow \text{lineares Kraftgesetz}}$$

9.8 Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung

Aus dem linearen Kraftgesetz

$$F_a(t) = F_R(t)$$

folgt mit Hilfe des 2. Newtonschen Gesetzes:

$$m \cdot a(t) = -D \cdot s(t)$$

mit

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

folgt somit:

$$m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t)$$

Durch eine kleine Umformung erhält man schließlich die Differenzialgleichung der ungedämpften harmonischen Schwingung:

$$\boxed{m \cdot \ddot{s}(t) + D \cdot s(t) = 0}$$

Das Lösen einer Differenzialgleichung ist in der Regel eine recht heikle Sache. Aber nicht für uns!
Gesucht ist also eine Funktion $s(t)$, welche die obige Differenzialgleichung erfüllt.
Lösungsansatz:

$$s(t) = A \cdot \sin\left(\omega t + \rho_0\right)$$

hieraus folgt:

$$\dot{s}(t) = A\omega \cdot \cos\left(\omega t + \rho_0\right)$$

$$\ddot{s}(t) = -A\omega^2 \cdot \sin\left(\omega t + \rho_0\right) = -\omega^2 \cdot s(t)$$

setzt man diese Beziehung in die Differenzialgleichung ein, so folgt:

$$m \cdot \ddot{s}(t) + D \cdot s(t) = -m\omega^2 \cdot s(t) + D \cdot s(t) = \left(-m\omega^2 + D\right) \cdot s(t) = 0$$

Da $s(t)$ nicht für alle Zeiten t gleich Null ist muss

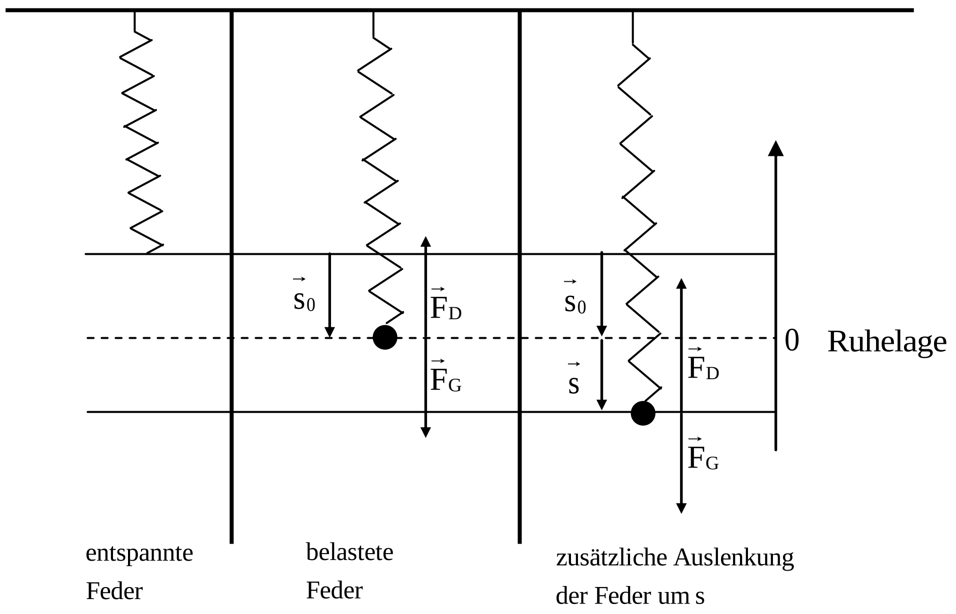
$$-m\omega^2 + D = 0$$

sein, also:

$$D = m\omega^2$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\tfrac{m}{D}}$$

9.9 Überprüfung der Gültigkeit des linearen Kraftgesetzes am vertikalen Federpendel (Schwere-Federpendel)



Die Schraubenfeder (Federkonstante D) ist zunächst entspannt.
Wird nun an die Schraubenfeder ein Körper der Masse m gehängt, so wird sie durch dessen Gewichtskraft $\vec{F}_G = m\vec{g}$ um die Strecke s_0 gedehnt (vorgespannt).
Für die Gleichgewichtslage des Pendels gilt:

$$\vec{F}_D = -\vec{F}_G$$
$$-D\cdot\vec{s}_0 = -m\cdot\vec{g}$$
$$D\cdot\vec{s}_0 = m\cdot\vec{g} \qquad (1)$$

Lenkt man nun den Pendelkörper zusätzlich um die Strecke s aus, so versetzt man es in vertikale Schwingung. Die nach unten gerichtete Gewichtskraft $\vec{F}_G$ bleibt konstant, während sich die elastische Federkraft $\vec{F}_D$ mit der Dehnung $s_0 + s$ ändert.

Für die rücktreibende Kraft $\vec{F}_R$ gilt:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_D + \vec{F}_G$$
$$\vec{F}_R = D\left(-\vec{s}_0 - \vec{s}\right) + m\vec{g}$$
$$\vec{F}_R = -D\vec{s}_0 - D\vec{s} + m\vec{g} \overset{(1)}{=} -m\vec{g} - D\vec{s} + m\vec{g} = -D\vec{s}$$
$$\vec{F}_R = -D\vec{s}$$

daraus folgt dann:

$$\boxed{F_R = -D\cdot s} \quad \text{Lineares Kraftgesetz}$$

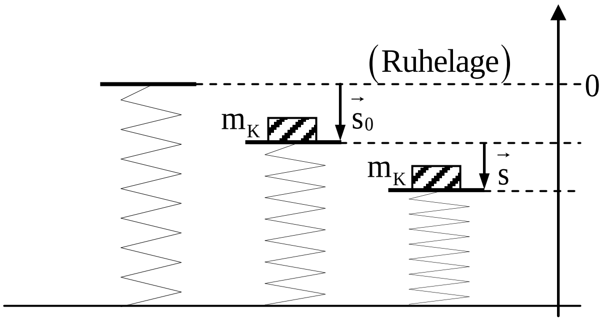
Das Minuszeichen besagt dabei, dass die Kraft von der Feder selbst aufgebracht wird. (Die Gewichtskraft ist positiv, da sie von außen aufgebracht wird!)

Die Masse der Feder bleibt dabei unberücksichtigt!

Merke: Bei einer Einzelfeder ist die Federkonstante D identisch mit der Richtgröße D des Federpendels.

Aufgaben:

1.0 Eine Feder, für die das Hooksche Gesetz gilt und deren Masse unberücksichtigt bleibt wird senkrecht auf eine feste Unterlage angebracht. Auf dieser Feder befindet sich ein Teller dessen Masse m_T vernachlässigt werden kann. Diese Tellerfederwaage (eine technische Anwendung wäre ein Schüttelsieb) befindet sich in der Ruhelage. Legt man nun auf den Teller einen Körper der Masse m_K, so wird die Feder um die Strecke s_0 gestaucht.



1.1 Die Tellerfederwaage hat bei der maximalen Belastung mit der Masse $m_{Max} = 10,0\,kg$ ein maximale Stauchung von $s_{Max} = 10,0\,cm$. Berechnen Sie bis zu welcher Stelle s_0 der Teller ausgelenkt wird wenn man einen Körper der Masse $m_K = 1,50\,kg$ auf den Teller legt?
$\left[\text{Teilergebnis}: D = 981\,\frac{N}{m}\right]$

1.2.0 Die Tellerfederwaage wird nun um $\hat{s} = 1,00\,cm$ nach unten gedrückt und zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,s$ losgelassen.

1.2.1 Zeigen Sie zunächst allgemein, dass die Tellerfederwaage eine harmonische Schwingung vollführt.

1.2.2 Zeigen Sie ausgehend von der Rückstellkraft $F_R = -Ds$, dass gilt:

$$D = m \cdot \omega^2$$

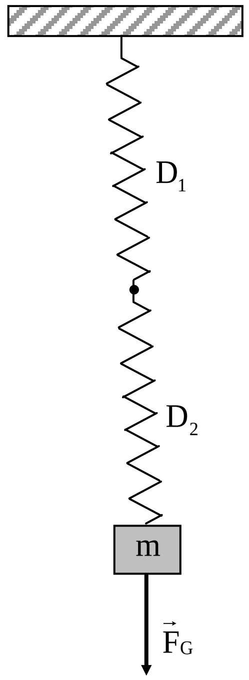
1.2.3 Berechnen Sie mit Hilfe der Gleichung von 1.2.2 mit welcher Frequenz das System schwingt? Führen Sie auch eine Einheitenkontrolle durch.

1.2.4 Untersuchen Sie, ob man mit dieser Tellerfederwaage ein „Sekundenpendel“ erhalten könnte?

1.2.5 Um welche Strecke müsste die Tellerfederwaage mindestens nach unten auslenkt werden, damit der Körper im oberen Umkehrpunkt vom Teller abhebt?

9.10 Kombinationen von Federn

Nun werden zwei Federn der Federhärte D_1 und D_2 in Reihe bzw. Parallel aufgehängt.



Reihenschaltung:

Bei der Reihenschaltung wirkt auf jede Feder die gleiche Kraft F.

$$F = F_G$$

Insgesamt werden die beiden Federn um die Strecke s gedehnt.

$$s = s_1 + s_2$$

Aus dem Hook´schen Gesetz $F = D \cdot s$ folgt mit $s = \frac{F}{D}$:

$$\frac{F}{D} = \frac{F}{D_1} + \frac{F}{D_2}$$

Dividiert man die Gleichung noch durch F so folgt:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$$

und daraus schließlich für die Federhärte (Richtgröße) des Systems:

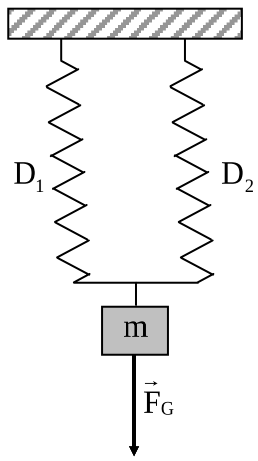
$$D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}$$

Man kann zeigen, dass die Federhärte der Reihenschaltung weicher ist als die weichste der zwei Federn:

Sei $D_1 < D_2$, dann gilt: $D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} < \frac{D_1 D_2}{D_2} = D_1 \Rightarrow D < D_1$

Verallgemeinerung: Für ein System aus n in Reihe gehängten Federn gilt:

$$\frac{1}{D} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D_i}$$



Parallelschaltung:

Bei der Parallelschaltung wird jede Feder um die gleiche Strecke s gedehnt:

$$s = s_1 = s_2$$

Die Gesamtkraft $F = F_G$ die auf die Federn wirkt verteilt sich auf beide Federn.

$$F = F_1 + F_2$$

Aus dem Hook´schen Gesetz $F = D \cdot s$ folgt somit:

$$Ds = D_1 s_1 + D_2 s_2$$

$$Ds = D_1 s + D_2 s$$

Dividiert man die Gleichung noch durch s, so folgt für die Federhärte (Richtgröße) des Systems:

$$D = D_1 + D_2$$

Anhand der Formel erkennt man schon, dass die Federhärte des Systems härter ist als die der härtesten Feder.

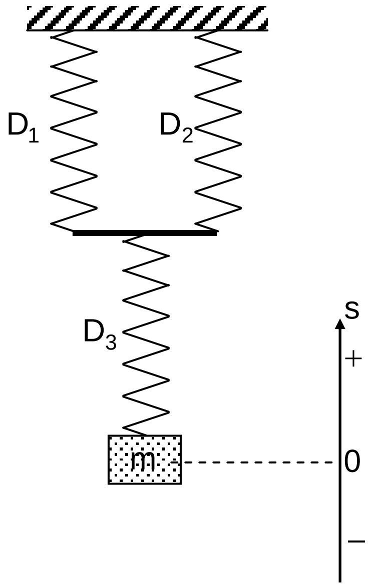
Verallgemeinerung: Für ein System aus n Parallel gehängten Federn gilt:

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

Die Federhärte entspricht der Steigung der Ursprungshalbgeraden im s-F-Diagramm.
Systeme aus drei Federn gleicher Federhärte können untersucht werden (Reihe; Parallel; Parallel-Reihe)!
Systeme aus n Federn gleicher Federhärte die entweder alle in Reihe oder alle Parallel gehängt sind können untersucht werden!

Aufgaben:

2.0 Gegeben ist die nebenstehende Anordnung dreier Federn mit den Federhärten $D_1 = D_2$ und $D_3 = 2 \cdot D_1$. Das System schwingt harmonisch mit der Periodendauer $T = 1{,}40\,\text{s}$. Die schwingende Gesamtmasse beträgt $m = 5{,}00\,\text{kg}$. Die Massen der Federn und der Querverbindung sind zu vernachlässigen. Am Schwerpunkt der schwingenden Masse wird ein Zeiger angebracht, der die jeweilige Auslenkung $s(t)$ gegenüber der Nulllage anzeigt. Das System wird als ungedämpft betrachtet.



2.1 Ermitteln Sie zunächst die Federhärten der einzelnen Federn aus den gegebenen Daten.
$\left[\text{Rechnen Sie weiter mit der Richtgröße } D = 101\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\right]$

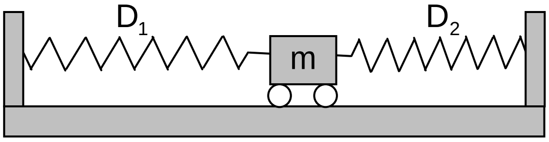
2.2.0 Die schwingende Masse bewegt sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ durch die Ruhelage in negative Richtung.

2.2.1 Geben Sie die Gleichung für die Auslenkung $s(t)$ mit eingesetzten Zahlenwerten an, wenn die Masse zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ eine Geschwindigkeit vom Betrag $71{,}8\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}}$ besitzt.
$\left[\text{Rechnen Sie weiter mit } v(t) = -71{,}8\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{0{,}700\,\text{s}} \cdot t\right)\right]$

2.2.2 Geben Sie die Gleichung für die Rückstellkraft (mit eingesetzten Zahlenwerten) als Funktion der Zeit t an und berechnen Sie den Zeitpunkt t_2, zu dem die Rückstellkraft zum zweiten mal einen Wert von $F_R(t_2) = 12{,}0\,\text{N}$ besitzt.

2.2.3 Berechnen Sie die Gesamtenergie des schwingenden Systems und den Zeitpunkt t_3, bei dem die kinetische Energie des Systems zum dritten mal 75% der Gesamtenergie beträgt.

Beispiel: Bestimme die Federkonstante der folgenden Anordnung!



Wird der Wagen durch die Kraft F nach rechts um die Strecke s ausgelenkt, so treten folgende Gegenkräfte auf.

Rückstellkraft F_1 der Feder 1 nach links: $F_1 = -D_1 \cdot s$

Rückstellkraft F_2 der Feder 2 nach links: $F_2 = -D_2 \cdot s$

Für die Rückstellkraft F_R gilt:

$$F_R = F_1 + F_2$$
$$F_R = -D_1 \cdot s - D_2 \cdot s$$
$$F_R = -(D_1 + D_2)s = -D \cdot s \qquad \text{Lineares Kraftgesetz}$$

mit $D = D_1 + D_2$.

9.11 Das Fadenpendel

Lenkt man einen Pendelkörper der Masse m aus der Ruhelage um den Winkel ρ aus, so lässt sich die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ auf den Pendelkörper in eine Komponente $\vec{F}_S$ (Spannkraft) längs des Fadens und eine Komponente $\vec{F}_R$ (Rückstellkraft) in Richtung der Bahntangente zerlegen.
Für die Rückstellkraft gilt:

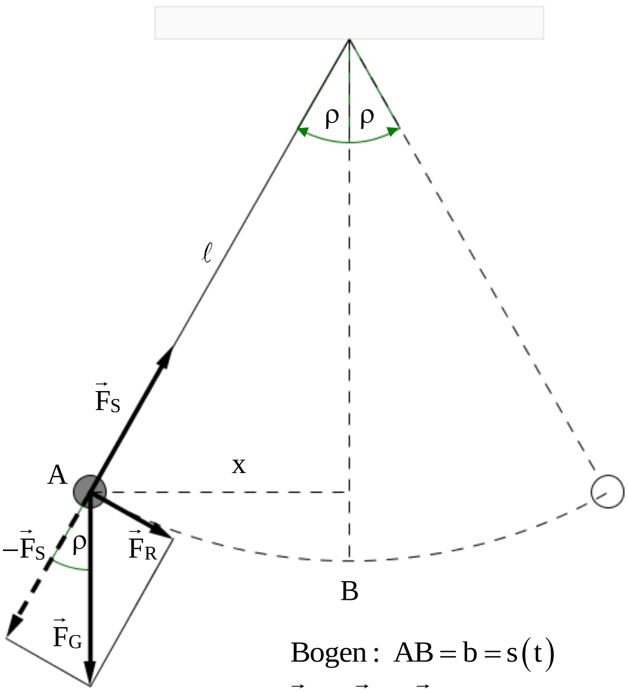
$$F_R \overset{(1)}{=} F_G \sin(-\rho) = -mg \sin\rho$$

$$F_R \overset{(2)}{=} -mg \sin\left(\frac{s}{l}\right) \overset{(3)}{=} -mg\frac{s}{l}$$

$$F_R = -\frac{mg}{l}s = -D \cdot s$$

mit $\quad D = \dfrac{mg}{l}$

$$\Rightarrow \; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Bogen: $AB = b = s(t)$

$\vec{F}_G = \vec{F}_R + \vec{F}_S$

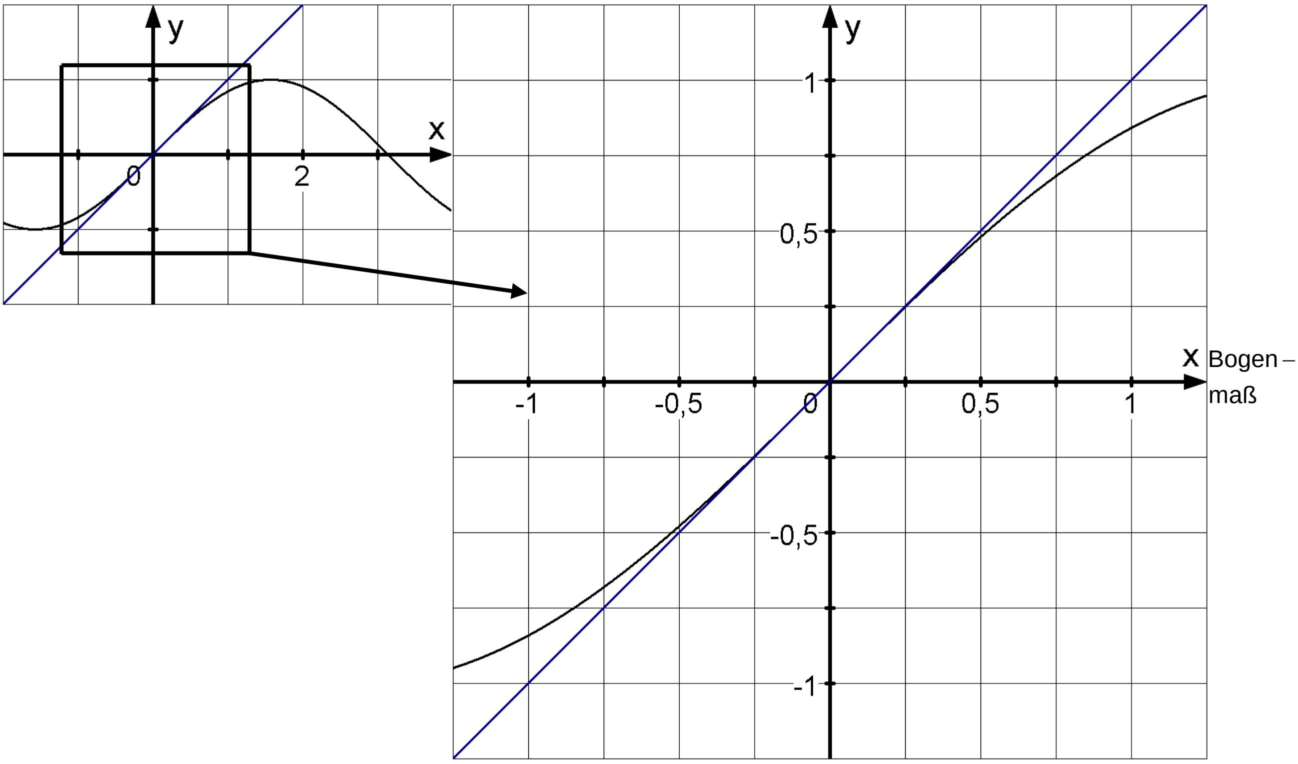
(1) Da die Auslenkung entgegen der Rücktreibenden Kraft gerichtet ist.

(2) Definition des Winkels ρ im Bogenmaß: $\rho = \frac{s}{l}$

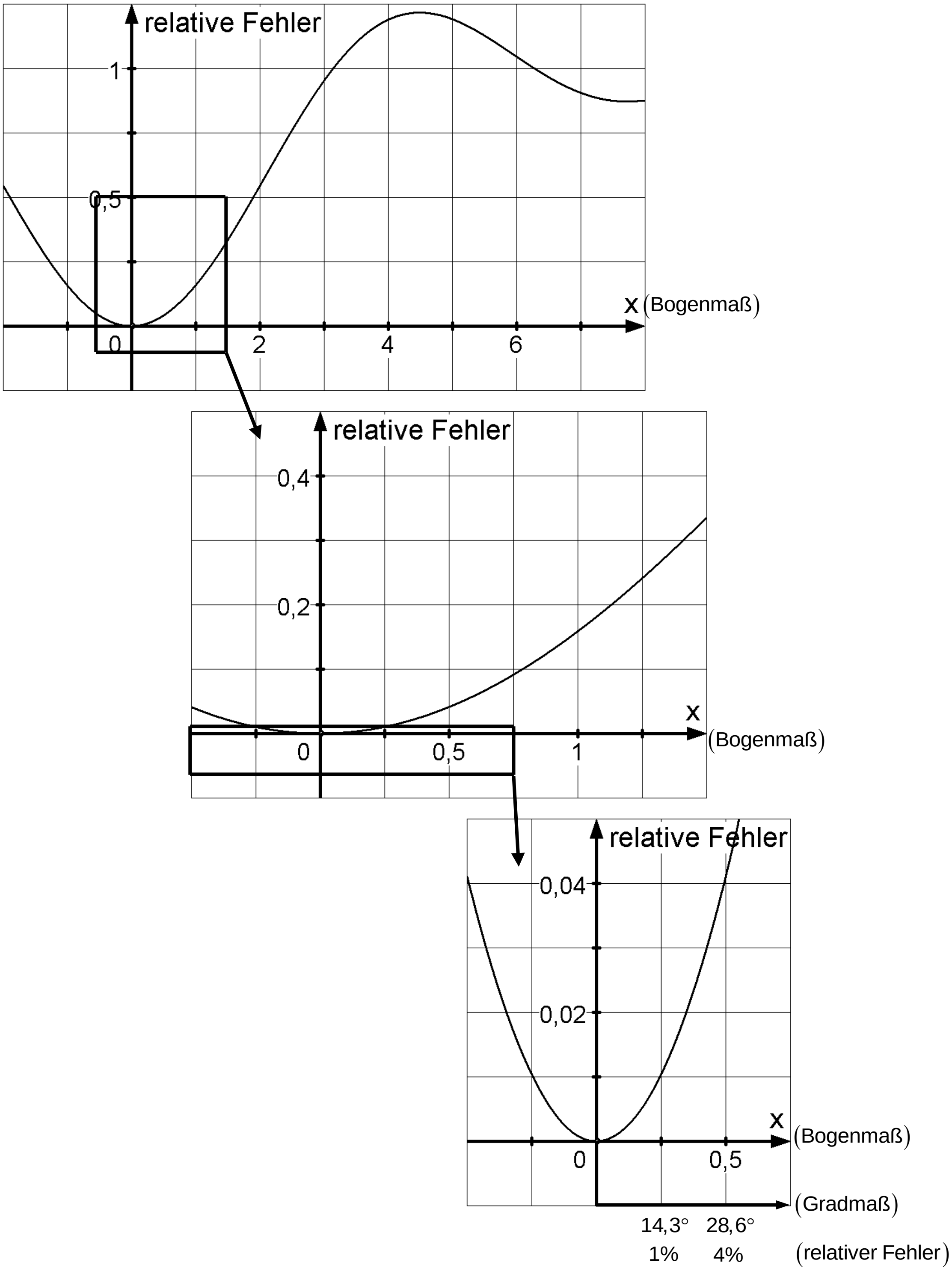
$\left(360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi = \frac{2\pi r}{r}; 180° = \pi = \frac{2\pi r \cdot \frac{1}{2}}{r}; 90° = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi r \cdot \frac{1}{4}}{r}\right)$

(3) Der Sinus eines kleinen Winkels kann durch sein Argument angenähert werden.

Es gilt: $\sin x \approx x$ für sehr kleine Werte von x (FS S.38 B2)
Der Graph der Sinusfunktion verläuft in der Nähe des Koordinatenursprungs nahezu identisch mit der Winkelhalbierenden des I. u. III. Quadranten.



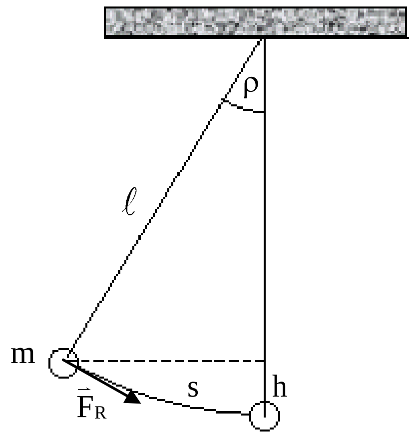
Welchen relativen Fehler $r(x) = \frac{x - \sin x}{x}$ man durch diese Näherung macht erhält man aus folgenden Graphiken.



Experimentelle Bestimmung der Fallbeschleunigung g durch messen der Periodendauer T und der Länge l des Fadens!

Aufgaben:

3.0 Das Pendel einer Uhr kann durch ein Fadenpendel idealisiert werden. Dabei wird die Masse m eines Fadenpendels nach links um den Winkel ρ ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0\,s$ losgelassen. Für verschiedene Längen ℓ des Pendels wird die Periodendauer T bestimmt.
Es ergibt sich folgende Messreihe:



ℓ in m	0,10	0,15	0,30	0,50	0,75
T in s	0,63	0,78	1,10	1,42	1,74

3.1 Zeigen Sie, durch graphische Auswertung der Messreihe, dass die Gleichung $T = k \cdot \sqrt{\ell}$ gilt, wobei k eine Konstante ist.
$\left(\text{Massstab}: 0{,}1\sqrt{m} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}; 0{,}2\,s \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}\right)$

3.2 Ermitteln Sie mit Hilfe des Diagramms von 3.1 die Länge des Pendels, so dass man ein Sekundenpendel $(T = 1{,}00\,s)$ erhält.

3.3 Zeigen Sie, durch allgemeine Herleitung, dass für die Koordinate F_R der Rückstellkraft gilt:
$F_R = -\frac{mg}{\ell} \cdot s$, wobei g der Betrag der Fallbeschleunigung ist.

3.4 Leiten Sie, ausgehend von der Formel für die Periodendauer der harmonischen Schwingung, eine Beziehung zur Berechnung der konstanten k her und berechnen Sie daraus den Ortsfaktor g.
$\left(\text{Ergebnis}: k = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)$

3.5 Wie lange würde es dauern, bis ein Pendel mit der Länge $\ell = 0{,}25\,m$ gegenüber einem rechnerischen Sekundenpendel um genau eine Sekunde vorgeht?
(Rechnen Sie mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$)

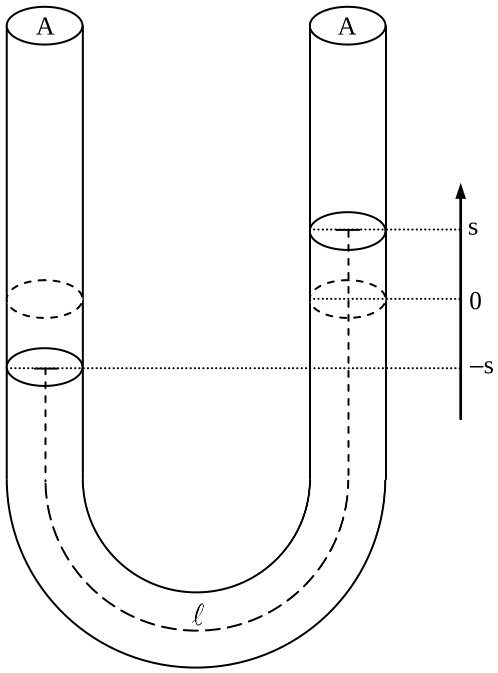
3.6 Begründen Sie, warum die Periodendauer T von der Auslenkhöhe h unabhängig ist.

3.7 Leiten Sie ausgehend vom linearen Kraftgesetz die Differentialgleichung für die ungedämpfte harmonische Schwingung her, geben Sie eine Lösung dieser Gleichung an und zeigen Sie, dass gilt:

$$D = m \cdot \omega^2$$

3.8 Ein Pendel der Länge $\ell = 0{,}25\,m$ wird um $\rho = 15°$ nach links ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0\,s$ losgelassen. Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit des Pendel sowie den Betrag der Beschleunigung nach einer Zeit von $t_1 = 0{,}15\,s$.

9.12 Das U-Rohr



Ein U-Rohr besitzt an jeder Stelle den selben Querschnitt A und ist zum Teil mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt. Durch Änderung des Drucks in einem Schenkel kann die Flüssigkeitssäule aus dem Gleichgewicht gebracht werden. Gibt man sie wieder frei, so schwingt die Flüssigkeit hin und her. (Von Adhäsions- und Reibungskräften wird abgesehen)

Bei Auslenkung der Flüssigkeitssäule um die Strecke s ergibt sich für die Rückstellkraft F_R:

$$F_R = \Delta m \cdot g = \rho \cdot \Delta V \cdot g = \rho \cdot A \cdot 2s \cdot g$$

Berücksichtigt man, dass F_R und s entgegengesetzt orientiert sind, so folgt:

$$F_R = -\underbrace{2 \cdot \rho \cdot A \cdot g}_{D} \cdot s = -D \cdot s$$

mit der Richtgröße $D = 2 \cdot \rho \cdot A \cdot g = \text{konst.}$
Somit ist die Schwingung im U-Rohr harmonisch.

Für die Periodendauer T folgt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho \cdot V}{2 \cdot \rho \cdot A \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot \ell}{2 \cdot \rho \cdot A \cdot g}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2 \cdot g}}}$$

Dabei ist m die Masse der Flüssigkeit und ℓ die mittlere Gesamtlänge der Flüssigkeitssäule im U-Rohr!

Aufgaben:

4.0 Man füllt in ein $U-\text{Rohr}$ mit kreisförmigen Querschnitt und dem Durchmesser $d = 5{,}00\,\text{mm}$ Quecksilber mit der Masse $m = 600\,\text{g}$. Durch geeignete Maßnahmen wird das flüssige Quecksilber zum Schwingen gebracht. Die Dichte von Quecksilber beträgt $\rho = 13{,}6\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

4.1 Zeigen Sie, durch nachvollziehbare allgemeine Herleitung (evtl. mit Skizze), dass die Quecksilbersäule harmonisch schwingt, wenn man von Reibungs-, Adhäsions- und Kohäsionskräften absieht!

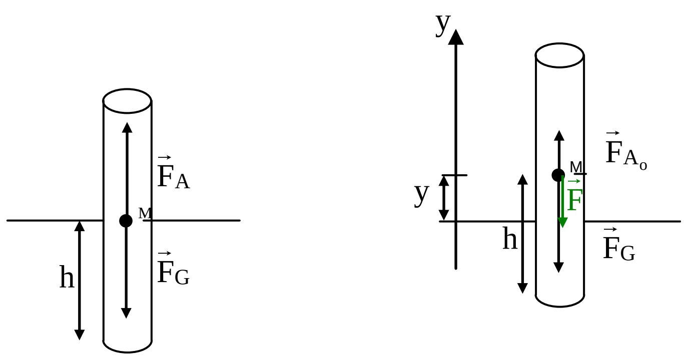
4.2 Berechne Sie die Periodendauer T der schwingenden Quecksilbersäule aus den unter 4.0 angegebenen Daten.

4.3 Berechen Sie, wie viel Gramm Glycerin mit der Dichte $\rho = 1{,}26\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ in das $U-\text{Rohr}$ eingefüllt werden müsste, um dieselbe Schwingungsdauer zu erzielen!

9.13 Körper in einer Flüssigkeit

Ein Körper, der an jeder Stelle den selben Querschnitt A besitzt schwimmt in einer Flüssigkeit der Dichte ρ. Durch leichtes Anheben bzw. Untertauchen des Körpers kann dieser aus seiner Gleichgewichtslage gebracht werden. Gibt man ihn wieder frei, so schwingt der Körper auf und ab. (Von Adhäsions- und Reibungskräften wird abgesehen)
Ein konkretes Beispiel findet man in der AP 2007 Aufgabe II:
In einem Gefäß befindet sich eine Flüssigkeit der Dichte ρ. In dieser Flüssigkeit schwimmt stabil ein mit Bleichschrot beschwertes zylinderförmiges Reagenzglas mit der Querschnittsfläche A und der Gesamtmasse m. Auf dem Reagenzglas ist eine Markierung M angebracht, bis zu der das Reagenzglas in der Gleichgewichtslage in die Flüssigkeit eintaucht. Aus dieser Gleichgewichtslage wird das Reagenzglas nach oben gezogen und dann losgelassen. Nun schwingt das Reagenzglas in vertikaler Richtung auf und ab.

Gleichgewichtslage　　　　Auslenkung nach oben



In der Gleichgewichtslage wird die auf das Reagenzglas wirkende Gewichtskraft durch die Auftriebskraft kompensiert. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
F_G &= F_A \\
m \cdot g &= \rho \cdot g \cdot V \\
m \cdot g &= \rho \cdot g \cdot A \cdot h \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Wird das Reagenzglas nach oben ausgelenkt, dann gilt für die beschleunigende Kraft F:

$$F = F_{A_o} - F_G = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h - y) - m \cdot g = \underbrace{\rho \cdot g \cdot A \cdot h}_{m \cdot g} - \rho \cdot g \cdot A \cdot y - m \cdot g = -\rho \cdot g \cdot A \cdot y$$

Somit gilt: $F = -\underbrace{\rho \cdot g \cdot A}_{D} \cdot y = -D \cdot y$ mit $D = \rho \cdot g \cdot A$

Also gilt das lineare Kraftgesetz, das Reagenzglas schwingt harmonisch.

Bemerkung: Da die Auftriebskraft um das aus dem Wasser angehobene Volumenanteil verringert wird, gilt:

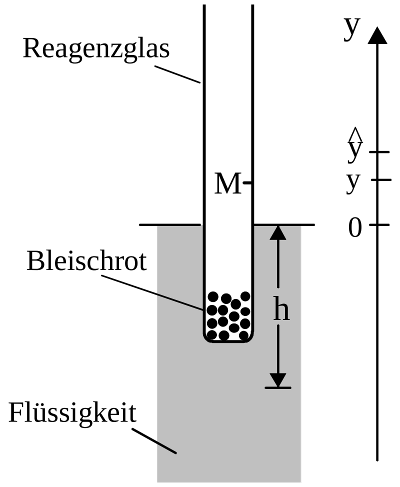
$$F_{A_o} = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h - y)$$

Für die Periodendauer der harmonischen Schwingung folgt somit

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho \cdot A \cdot g}}$$

2007 A II

3.0 Ein Körper, der sich in einer Flüssigkeit befindet, erfährt eine Auftriebskraft $\vec{F}_A$. Der Betrag dieser Kraft $\vec{F}_A$ ist genau so groß wie der Betrag der Gewichtskraft der Flüssigkeit, die vom Körper verdrängt wird.
In einem Gefäß befindet sich eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ. In dieser Flüssigkeit schwimmt stabil ein mit Bleischrot beschwertes zylinderförmiges Reagenzglas mit der Querschnittsfläche $A = 2{,}8\,\text{cm}^2$ und der Gesamtmasse $m = 35\,\text{g}$.
Auf dem Reagenzglas ist eine Markierung M angebracht, bis zu der das Reagenzglas in der Gleichgewichtslage in die Flüssigkeit eintaucht. Bei der zugehörigen Eintauchtiefe h halten sich die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ des mit Bleischrot beschwerten Reagenzglases und die auf das Reagenzglas wirkende Auftriebskraft das Gleichgewicht.
Aus dieser Gleichgewichtslage wird das Reagenzglas nach oben gezogen und dann losgelassen. Nun schwingt das Reagenzglas in vertikaler Richtung auf und ab.
Die Elongation der Markierung M wird mit y bezeichnet (siehe Skizze).
Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben sind Dämpfungsverluste zu vernachlässigen.



3.1 Begründen Sie, dass das Reagenzglas harmonisch schwingt, und zeigen Sie, dass für die Periodendauer T dieser Schwingung gilt: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho \cdot A \cdot g}}$

3.2.0 Das Reagenzglas wird nach oben gezogen und zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ aus der Ruhe heraus losgelassen. Es schwingt nun mit der Amplitude $\hat{y} = 3{,}0\,\text{cm}$ und der Schwingungsdauer $T = 0{,}80\,\text{s}$.

3.2.1 Die Elongation y der Markierung M ist abhängig von der Zeit t.
Bestimmen Sie eine Gleichung mit eingesetzten Werten, die diese Abhängigkeit aufzeigt.

3.2.2 Zum Zeitpunkt t_2 befindet sich die Markierung M zum zweiten Mal $1{,}8\,\text{cm}$ oberhalb der Flüssigkeitsoberfläche.
Berechnen Sie t_2.

3.2.3 Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit des Reagenzglases für den Zeitpunkt $t^* = 0{,}25\,\text{s}$.

Weitere Aufgaben

5. Eine Feder dehnt sich beim Anhängen einer Masse von $m_1 = 500\,g$ um $s_0 = 10\,cm$.
Bei einer angehängten Masse von $m_2 = 1,0\,kg$ wird eine Schwingungsdauer von $T = 0,92\,s$ gemessen. Diese ist größer als die errechnete, da ein Teil der Federmasse auch mitschwingt, in der Formel aber nicht berücksichtigt ist.
Berechnen Sie die Größe der „schädlichen“ Federmasse!

6. Im Rahmen des Apolloprogramms wurde von den Astronauten folgendes Experiment auf dem Mond zur Bestimmung der Fallbeschleunigung mit Hilfe eines Fadenpendels unbekannter Länge durchgeführt:
Sie bestimmten zunächst die Schwingungsdauer $T_1 = 4,0\,s$ und nach Verlängerung der Pendellänge um $\Delta\ell = 1,36\,m$ die Schwingungsdauer $T_2 = 7,0\,s$.
Berechnen Sie aus diesen Messdaten die Fallbeschleunigung g_M auf dem Mond.
Hinweis: Mit diesem Verfahren lässt sich der Einfluss der in Abweichung von der Theorie nicht punktförmigen Masse ausschalten.

7.0 Man füllt in ein U-Rohr vom Durchmesser $d = 3,4\,mm$ Quecksilber der Masse $m_Q = 25\,g$ $\left(\rho_Q = 13,8\,\frac{kg}{dm^3}\right)$. Durch geeignete Maßnahmen wird die Quecksilbersäule zum Schwingen angeregt.

7.1 Zeigen Sie, dass die entstandene Schwingung eine harmonische Schwingung ist. (Von Reibungs-, Kohäsions- und Adhäsionskräften soll abgesehen werden)Berechnen Sie die Schwingungsdauer dieser Schwingung zuerst allgemein, dann speziell aus den oben angegebenen Daten!

7.2 Wie viel Gramm Wasser müsste man an Stelle von Quecksilber einfüllen, um dieselbe Schwingungsdauer zu erzielen?

7.3 Eine bestimmte Schwingung dieser Anordnung habe die Frequenz $f = 0,50\,Hz$ und die Amplitude $A = 5,0\,cm$.
Berechnen Sie die Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung $3,7\,s$ nach dem Durchgang durch die Ruhelage in positiver Richtung!

7.4 Stellen Sie die Elongation s als Funktion der Zeit t im Zeitintervall $0\,s \le t \le 2,5 \cdot T$ graphisch dar (ohne Berücksichtung der Reibung).

7.5 Welche Veränderung erfährt der in 3.5 ermittelte Graph, wenn von der Reibung nicht abgesehen wird?

8. Wie lang muss ein Fadenpendel sein, damit es eine Schwingungsdauer von genau $2,00\,s$ besitzt (sogenanntes „Sekundenpendel“)?