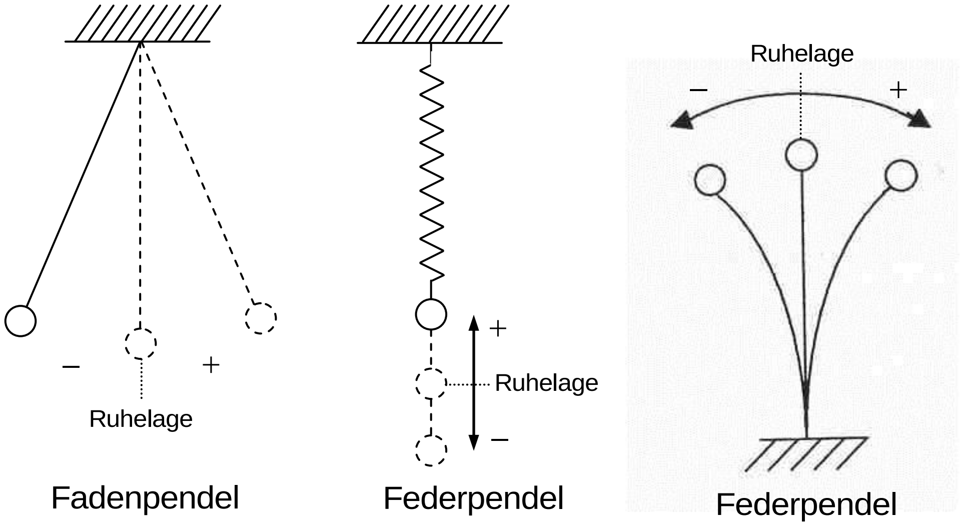
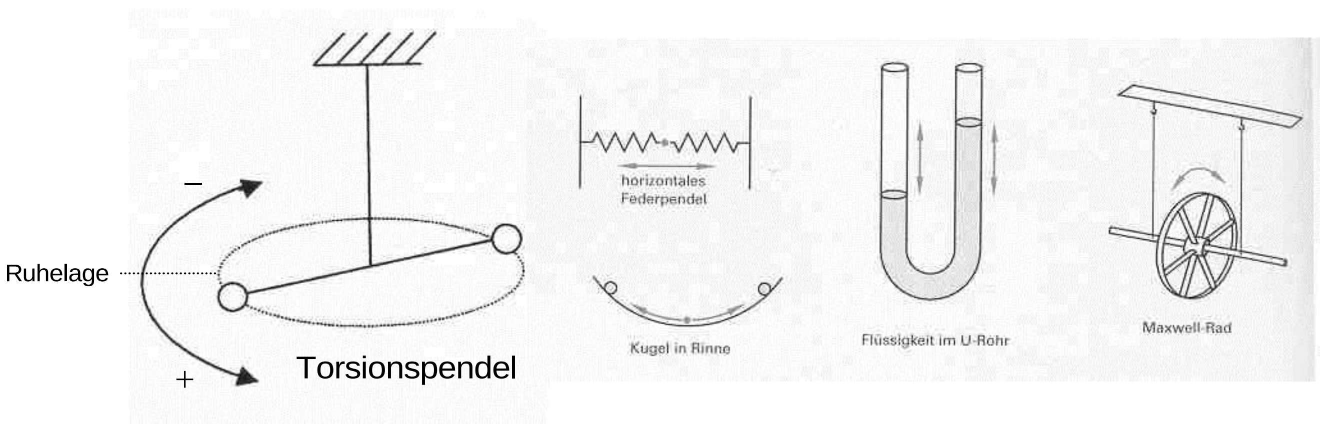
§ 9 Schwingungen

9.1 Beispiele und Grundlagen





Charakteristika:

- Die Bewegung ist periodisch; d.h. die Bewegung wiederholt sich nach einer bestimmten Zeit immer wieder.
- Die Bewegung erfolgt symmetrisch zur Ruhelage des schwingenden Systems (Oszillator)

Definition: Die Bewegung eines Körpers, die sich in festen Zeitabständen wiederholt und symmetrisch zu einer Ruhelage abläuft heißt Schwingung.

Die jeweilige, momentane Auslenkung der schwingenden Masse gegenüber der Ruhelage (Nulllage) nennt man die Elongation $\left(s(t);\, y(t)\right)$.

Der Betrag der maximal auftretenden Elongation heißt Amplitude $\left(A;\, s_{max};\, y_{max}\right)$.

Bleibt die Amplitude während des gesamten Schwingungsvorgangs konstant, so liegt eine ungedämpfte Schwingung vor. Nimmt die Amplitude mit der Zeit ab, z. B. durch Reibung, so spricht man von einer gedämpften Schwingung.

Die Zeitspanne für einen Hin- und Hergang der Schwingung nennt man die Periodendauer T.

Für die Schwingungsfrequenz f gilt dann:

$$f = \frac{1}{T}$$

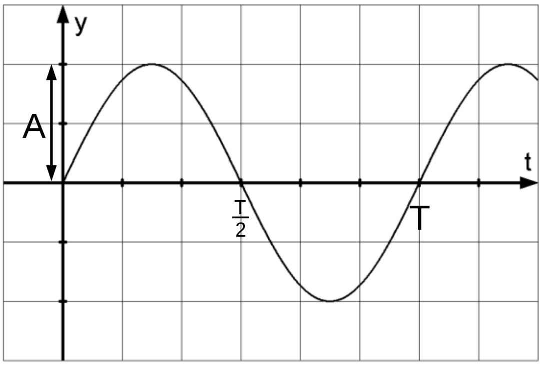
oder auch: $f = \frac{n}{t}$ $\left(n: \text{Anzahl der Schwingungsperioden; } t: \text{dafür benötigte Zeit}\right)$

Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung einer Schwingung werden folgende Bedingungen eingeführt:

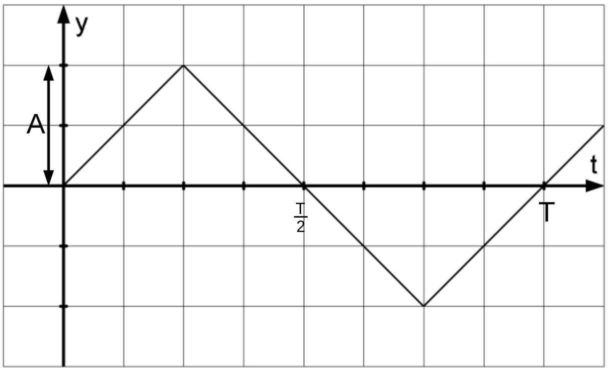
- es wird zunächst von Reibung abgesehen.
- Bewegung des schwingenden Körpers erfolge eindimensional; wird eindimensional projiziert.
- schwingende Massen werden als Massenpunkte betrachtet.

9.2 Zeit-Elongations-Diagramm für verschiedene Schwingungsformen

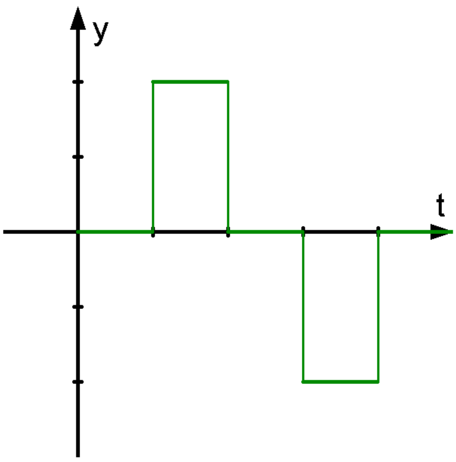
2.1 Sinusförmig (Federpendel)



2.2 Dreiecksförmig (Jo-Jo; Maxwell-Rad)



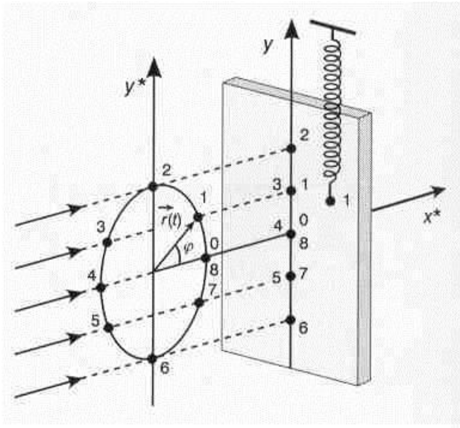
2.3 Rechteckförmig (Kipp-Schwingung)



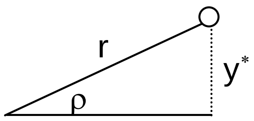
9.3 Die harmonische Schwingung

Eine Schwingung ist harmonisch, wenn zwischen ihr und einer Kreisbewegung ein geometrischer Zusammenhang besteht.

Eine Kugel, die mit konstanter Bahngeschwindigkeit einen Kreis umläuft wird mit parallelen Licht von der Seite her beleuchtet und der Schatten der Kugel auf einer senkrechten Ebene beobachtet. Parallel dazu lässt man den Pendelkörper eines Federpendels schwingen. Schwingen (die Schatten) beide Körper synchron, dann müssen sie die gleiche Zeit-Orts-Funktion haben. Diese erhält man folgendermaßen:



Die y^*-Koordinate der Kugel erhält man zunächst aus folgender geometrischen Überlegung:



$$\sin\rho = \frac{y^*}{r} \quad \Rightarrow \quad y^* = r \cdot \sin\rho$$

Bei der gleichmäßigen Kreisbewegung gilt:

$$\omega = \frac{\rho}{t} \quad \Rightarrow \quad \rho = \omega t$$

und somit folgt:

$$y^* = r \cdot \sin(\omega t)$$

Befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Masse nicht in der Ruhelage, so muss eine gewisse Phasenverschiebung ρ_0 berücksichtigt werden: also

$$y^* = r \cdot \sin(\omega t + \rho_0)$$

Da die Bewegung zu irgendeinem Zeitpunkt auch mal die maximale Auslenkung erreichen muss gilt:

$$y^*_{max} = A$$

also:

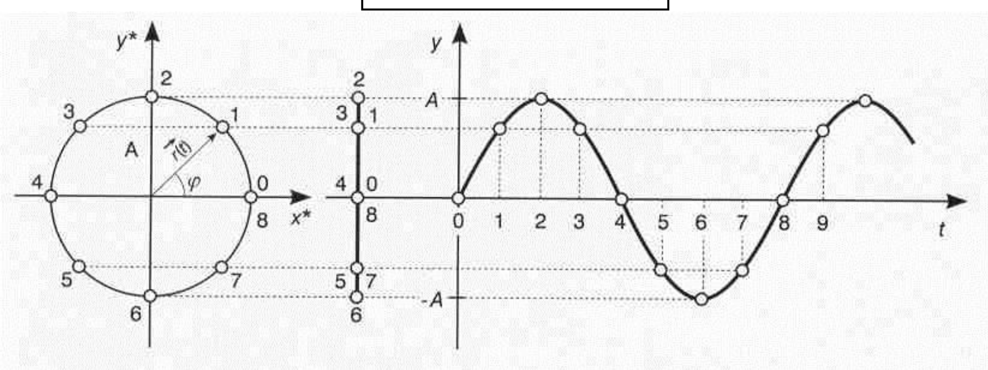
$$r = A$$

und somit:

$$y^* = A \cdot \sin(\omega t + \rho_0)$$

Die y^*-Koordinate der Kugel entspricht ja der y-Koordinate ihres Schattens und so folgt schließlich:

$$\boxed{y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \rho_0)} \qquad \text{Zeit} - \text{Orts} - \text{Funktion}$$



Mit Hilfe der Differenzialrechnung erhält man die Momentangeschwindigkeit

$$\xcancel{v(t)=\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}} \quad \text{da } v(t)\neq \text{konst.}$$

$$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{y(t+dt)-y(t)}{dt}=\dot{y}(t)=A\omega\cdot\cos(\omega t+\rho_0)$$

$$v(t)=\dot{y}(t)=A\omega\cdot\cos(\omega t+\rho_0)$$

dabei ist

$$\boxed{v_{max}=A\omega} \qquad \text{Betrag der Maximalgeschwindigkeit}$$

Entsprechend die Momentanbeschleunigung

$$\xcancel{a(t)=\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}} \quad \text{da } a(t)\neq \text{konst.}$$

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{v(t+dt)-v(t)}{dt}=\dot{v}(t)=-A\omega^2\cdot\sin(\omega t+\rho_0)$$

$$a(t)=\dot{v}(t)=\ddot{y}(t)=-A\omega^2\cdot\sin(\omega t+\rho_0)$$

dabei ist

$$\boxed{a_{max}=A\omega^2} \qquad \text{Betrag der Maximalbeschleunigung}$$

Ferner gilt auch:

$$a(t)=-\omega^2\cdot y(t)$$

Durch Umformung erhält man schließlich

$$\dot{v}(t)=-\omega^2\cdot y(t)$$

die Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung

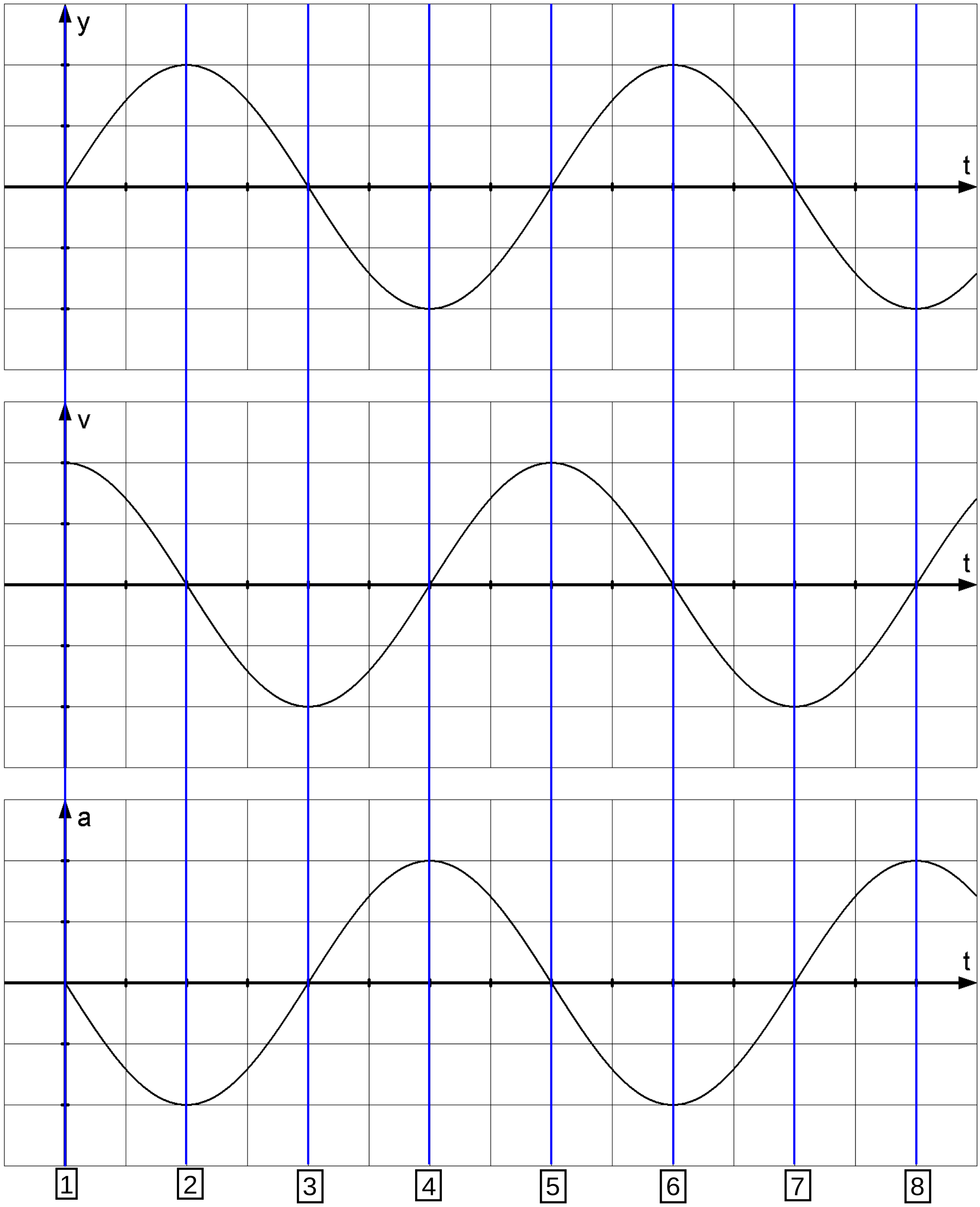
$$\ddot{y}(t)=-\omega^2\cdot y(t)$$

$$\boxed{\ddot{y}(t)+\omega^2\cdot y(t)=0}$$

9.4 Veranschaulichung dieser Zusammenhänge in den entsprechenden Diagrammen:

Wir nehmen zunächst an, dass die Pendelmasse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in positiver Richtung durch die Nulllage schwingt.

$y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$



1 Körper startet aus der Ruhelage nach oben in positiver Richtung; seine Geschwindigkeit ist in diesem Moment positiv (da nach oben gerichtet) und maximal; seine Beschleunigung ist null.
1 – 2 Körper bewegt sich nach oben in positiver Richtung; seine Geschwindigkeit ist positiv, nimmt aber ab; seine Beschleunigung ist negativ (Verzögerung).
2 Körper befindet sich im oberen Umkehrpunkt, er hat maximale positive Auslenkung; seine Geschwindigkeit ist null; seine Verzögerung ist maximal.
2 – 3 Körper bewegt sich nach unten; er hat negative Geschwindigkeit, der Geschwindigkeitsbetrag nimmt zu; Beschleunigung negativ (da Geschwindigkeit negativ), nimmt aber zu.
3 Körper befindet sich in der Ruhelage (Nulldurchgang); sein Geschwindigkeitsbetrag ist maximal (Geschwindigkeit negativ, da Bewegung nach unten); Beschleunigung null
3 – 4 Körper bewegt sich nach unten; seine Geschwindigkeitsbetrag nimmt ab (Geschwindigkeit nimmt zu); Beschleunigung ist positiv
4 Körper befindet sich im unteren Umkehrpunkt, er hat maximale negative Auslenkung; seine Geschwindigkeit ist null; Beschleunigung ist maximal
4 – 5 Körper bewegt sich nach oben; seine Geschwindigkeit nimmt zu; Beschleunigung nimmt ab.
5 siehe 1

9.5 Berücksichtigung des Nullphasenwinkels

$\rho_0 = 0$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in der Ruhelage und bewegt sich nach oben.

$0 < \rho_0 < \frac{\pi}{2}$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zwischen der Ruhelage und dem oberen Umkehrpunkt und bewegt sich nach oben.

$\rho_0 = \frac{\pi}{2}$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im oberen Umkehrpunkt.

$\frac{\pi}{2} < \rho_0 < \pi$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zwischen dem oberen Umkehrpunkt und der Ruhelage und bewegt sich nach unten.

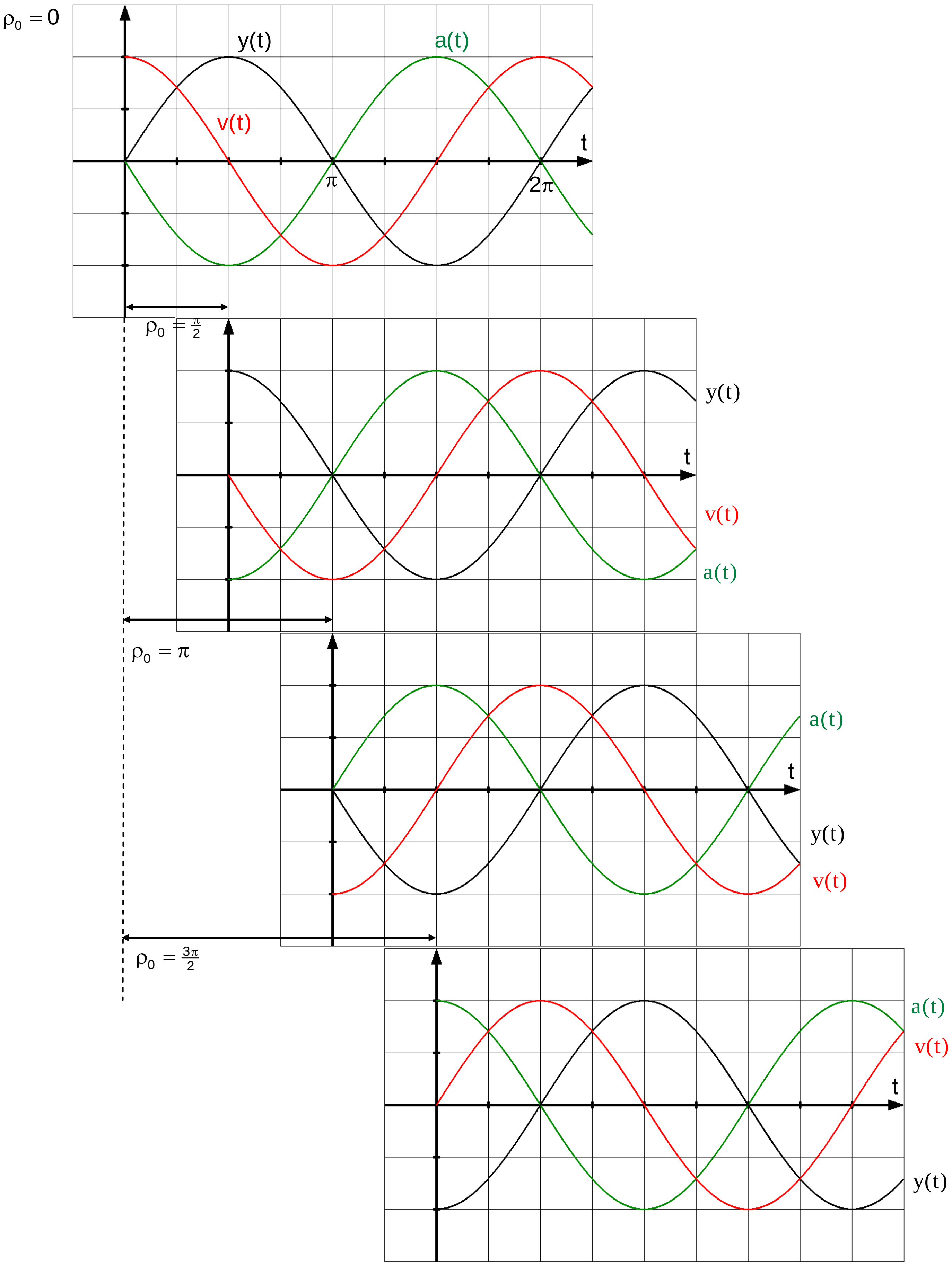
$\rho_0 = \pi$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in der Ruhelage und bewegt sich nach unten.

$\pi < \rho_0 < \frac{3\pi}{2}$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zwischen der Ruhelage und dem unteren Umkehrpunkt und bewegt sich nach unten.

$\rho_0 = \frac{3\pi}{2}$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im unteren Umkehrpunkt.

$\frac{3\pi}{2} < \rho_0 < 2\pi$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zwischen dem unteren Umkehrpunkt und der Ruhelage und bewegt sich nach oben.

Man kann auch alle drei Funktionen in ein Diagramm zeichnen!



Aufgaben

1.0 Ein Körper der Masse $m = 50\,g$ schwingt sinusförmig. In einer Zeit von $t = 10\,s$ vollendet er 8 Schwingungen. Die Zeitrechnung beginnt, wenn er die Nulllage in Richtung der positiven y-Achse passiert. Der Abstand der Umkehrpunkte beträgt $18\,cm$.

1.1 An welcher Stelle befindet sich der Körper nach $8{,}0\,s$?

$\left(y(t) = 0{,}09m \cdot \sin\left(1{,}6\tfrac{\pi}{s} \cdot t\right);\ \ y(8{,}0s) \approx 5{,}3cm \right)$

1.2 Wie groß sind seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung nach $8{,}0\,s$? Gib auch die Richtung dieser vektoriellen Größen bezüglich der y-Achse an!

$\left(v(t) = 0{,}144 \cdot \pi \tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(1{,}6\tfrac{\pi}{s} \cdot t\right);\ v(8{,}0s) \approx -0{,}37\tfrac{m}{s};\ \text{Körper bewegt s. nach unten} \right)$

$\left(a(t) = -0{,}2304 \cdot \pi^2 \tfrac{m}{s^2} \cdot \sin\left(1{,}6\tfrac{\pi}{s} \cdot t\right);\ a(8{,}0s) \approx -1{,}3\tfrac{m}{s^2};\ \text{Beschleunigt in neg. Richtung} \right)$

1.3 Berechne den Betrag der maximalen Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung!

$\left(\left|v_{max}\right| = A\omega \approx 0{,}45\tfrac{m}{s};\ \left|a_{max}\right| = A\omega^2 \approx 2{,}3\tfrac{m}{s^2} \right)$

1.4 Berechne, zu welchen Zeiten sich der Körper im oberen Umkehrpunkt befindet!

$\left(t_n = \tfrac{5}{16}s + (n-1) \cdot T;\ n \in \mathbb{N};\ \text{allgemeiner}:\ t_n = \left(n + \tfrac{1}{4}\right)T \right)$

1.5 Gib eine Formel für die Rückstellkraft an!

$\left(F_R = -Am\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \approx -0{,}11N \cdot \sin\left(1{,}6\tfrac{\pi}{s} \cdot t\right) \right)$