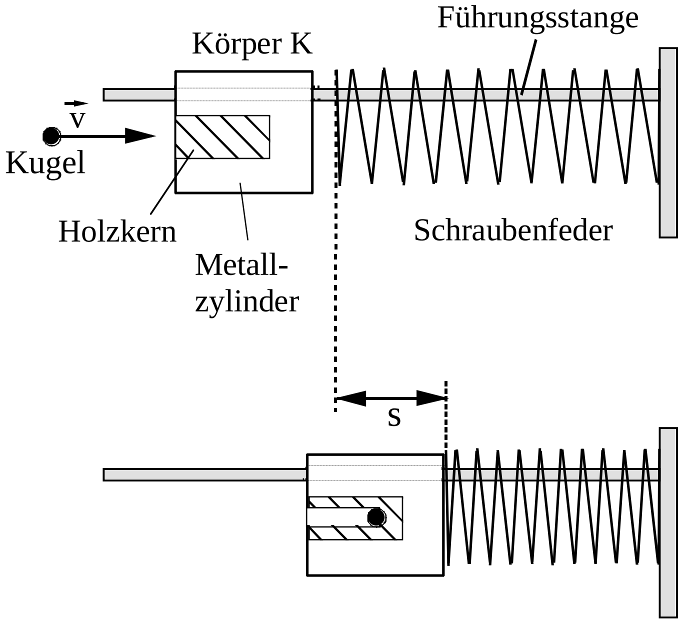
2001 Aufgabe 1

2.0 Mit Hilfe der dargestellten Anordnung lässt sich der Betrag der Geschwindigkeit einer Gewehrkugel bestimmen. Eine Gewehrkugel mit der Masse $m = 0{,}60\,g$ trifft mit horizontaler Geschwindigkeit $\vec{v}$ auf einen Körper K der Masse $M = 200{,}0\,g$. K besteht aus einem einseitig offenen Metallzylinder und einem Holzkern. Die Kugel dringt in den Körper K ein und bleibt darin stecken. K kann sich zusammen mit der in ihm steckenden Kugel reibungsfrei auf einer horizontalen Führungsstange bewegen und prallt gegen das freie Ende einer Schraubenfeder mit der Federkonstanten $D = 70\,\frac{N}{m}$. s ist die Länge der Strecke, um die die Feder nach dem Aufprall zusammengedrückt wird. Für die Schraubenfeder gilt auch bei Druckbelastungen, wie sie in den folgenden Aufgaben auftreten, das Hooke´sche Gesetz. Die Masse der Feder wird vernachlässigt.



2.1 Erläutern Sie die Energieumwandlung, die beim Eindringen der Gewehrkugel in den Holzkern des Körpers K, und die Energieumwandlung, die beim Stauchen der Feder auftritt

Kinetische Energie der Kugel → Verformungsarbeit + Wärme+ Kinetische Energie des Holzkerns (incl. Kugel)
Kinetische Energie des Holzkerns (incl. Kugel) → Potenzielle Energie der Feder (Spannenergie)

2.2 Zeigen Sie, dass für den Betrag v der Geschwindigkeit der Gewehrkugel vor dem Eindringen in den Körper K gilt: $v = \frac{\sqrt{D\cdot(M+m)}}{m}\cdot s$

Energieerhaltung:

$$E_v = E_n$$
$$E_{kin} = E_{pot}$$
$$\tfrac{1}{2}(M+m)u^2 = \tfrac{1}{2}Ds^2$$
$$u = \sqrt{\frac{D}{(M+m)}}\cdot s \qquad (1)$$

Impulserhaltung:

$$p_v = p_n$$
$$m\cdot v = (M+m)\cdot u$$
$$v = \frac{(M+m)}{m}\cdot u \overset{(1)}{=} \frac{(M+m)}{m}\cdot\sqrt{\frac{D}{(M+m)}}\cdot s = \frac{\sqrt{D\cdot(M+m)}}{m}\cdot s$$

2.3.0 In einem Messversuch wird die Feder durch den Aufprall des Körpers K um $s = 4,0\,\text{cm}$ zusammengedrückt

2.3.1 Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von 2.2 den Betrag v der Geschwindigkeit, mit der die Gewehrkugel auf den Körper K trifft.

$$v = \frac{\sqrt{D\cdot(M+m)}}{m}\cdot s = \frac{\sqrt{70\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0,2000\,\text{kg}+0,00060\,\text{kg})}}{0,00060\,\text{g}}\cdot 0,040\,\text{m} \approx 2,5\cdot 10^2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.3.2 Berechnen Sie die beim Eindringen der Gewehrkugel in den Körper K in Wärme und Deformationsarbeit umgesetzte Energie.

$$\Delta E = E_n - E_v = \tfrac{1}{2}D\cdot s^2 - \tfrac{1}{2}m\cdot v^2$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}\cdot 70\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0,04\,\text{m})^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0,0006\,\text{kg}\cdot\left(2,5\cdot 10^2\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = -18,694\,\text{J} \approx -19\,\text{J}$$

2.3.3 Nach dem Aufprall auf das linke Ende der Schraubenfeder wird der Körper K mit der in ihm steckenden Kugel abgebremst. Dabei ist der Betrag der auftretenden Verzögerung nicht konstant.
Berechnen Sie den maximalen Betrag der auftretenden Verzögerung.

Es gilt:

$$F_B = F_F$$

$$(M+m)\cdot a = D\cdot s$$

$$a = \frac{D}{(M+m)}\cdot s$$

Die Beschleunigung ist somit maximal, wenn die Auslenkung maximal ist.

$$a_{max} = \frac{D}{(M+m)}\cdot s_{max} = \frac{70\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,2006\,\text{kg}}\cdot 0,04\,\text{m} \approx 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.3.4 Berechnen Sie die Länge Δt des Zeitintervalls, in dem die Feder um $s = 4,0\,\text{cm}$ zusammengedrückt wird.

Erst bei den Schwingungen lösbar!!

2.4 Der Körper K wird durch einen Stahlzylinder K^* mit der Masse $M^* = 200,0\,\text{g}$ ersetzt. Dieser kann sich wie der Körper K reibungsfrei auf der Führungsstange bewegen. Die Gewehrkugel mit der Masse $m = 0,60\,\text{g}$ trifft mit einer horizontalen Geschwindigkeit vom Betrag $v = 2,5\cdot 10^2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf den Körper K^*; es kommt zu einem vollkommen elastischen Stoß.
Berechnen Sie die Länge s^* der Strecke, um welche die Feder nun gestaucht wird.

Beim elastischen Stoß gilt für die Geschwindigkeit des Stahlzylinders nach dem Stoß:

$$u_2 = \frac{2mv_1 + (M^*-m)v_2}{m+M^*} \overset{v_2=0}{=} \frac{2mv_1}{m+M^*} = \frac{2\cdot 0,60\cdot 10^{-3}\,\text{kg}\cdot 2,5\cdot 10^2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{(0,60+200)\cdot 10^{-3}\,\text{kg}} = 1,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mit dem Energieerhaltungssatz folgt dann:

$$E_n = E_v$$

$$\tfrac{1}{2} D \cdot \left(s^*\right)^2 = \tfrac{1}{2} M^* u_2^2$$

$$s^* = u_2 \cdot \sqrt{\frac{M^*}{D}}$$

$$s^* = 1{,}5\,\tfrac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{200{,}0 \cdot 10^{-3}\,kg}{70\,\tfrac{N}{m}}} \approx 8{,}0\,cm$$