§ 5 Energie

Aufgaben:

1. Ein Auto der Masse $m = 1{,}0\,t$ fährt mit der Geschwindigkeit von $72\,\frac{km}{h}$ $(144\,\frac{km}{h})$.
   Berechnen Sie die kinetische Energie des Fahrzeuges und bestimmen Sie die Höhe, aus der es senkrecht herunterfallen müsste um die gleiche Energie zu erhalten.

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad E_{kin}(72\,\tfrac{km}{h}) = 0{,}20MJ \quad E_{kin}(144\,\tfrac{km}{h}) = 0{,}80MJ$$

$$E_{pot} = mgh \;\Rightarrow\; h = \frac{E_{pot}}{mg} = \frac{E_{kin}}{mg}$$

$$h\left(0{,}20MJ\right) = 20{,}4m \quad h\left(0{,}80MJ\right) = 81{,}5m$$

2. Mit der Geschwindigkeit von $18\,\frac{km}{h}$ fährt ein Auto gegen eine Betonwand und wird dabei um $0{,}50m$ zusammengedrückt (Knautschzone). Welche Kraft wird dabei auf einen angegurteten Insassen mit der Masse 75 kg ausgeübt, wenn die Kraft während des Abbremsvorgangs konstant ist?

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}mv^2 = F \cdot s = W \;\Rightarrow\; F = \frac{mv^2}{2s} = ... = 1875N \approx 1{,}9kN$$

3.0 Die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs der Masse $m = 1200\,kg$ wird erhöht. Berechnen Sie die zugehörige Beschleunigungsarbeit, wenn das Fahrzeug

3.1 von $v_0 = 80\,\frac{km}{h}$ auf $v_1 = 100\,\frac{km}{h}$ beschleunigt wird.

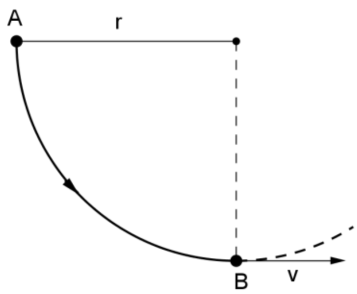
$$W_{Beschl.} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) = ... \approx 0{,}17\,MJ$$

3.2 von $v_1 = 100\,\frac{km}{h}$ auf $v_2 = 120\,\frac{km}{h}$ beschleunigt wird.

$$W_{Beschl.} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) = ... \approx 0{,}20\,MJ$$

3.3 Zeichnen Sie für $0 \le v \le 120\,\frac{km}{h}$ das zugehörige $v - E_{kin} - \text{Diagramm}$.

4.0 Eine kleine Metallkugel hängt an einem 80 cm langen Faden. Die Kugel befindet sich zuerst im Punkt A und wird dann losgelassen.



4.1 Berechnen Sie die Geschwindigkeit mit der die Kugel durch B schwingt !

$$E_{Ges}^{A} = E_{Ges}^{B}$$

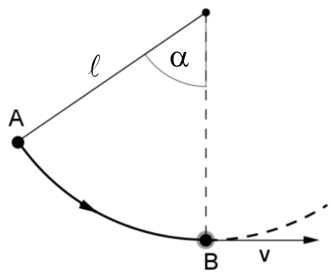
$$E_{pot}^{A} + \underbrace{E_{kin}^{A}}_{0} = \underbrace{E_{pot}^{B}}_{0} + E_{kin}^{B}$$

$$mgh_A = \tfrac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh_A}$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}80\,m} \approx 4{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

5. Eine Kugel, welche an einem Fadenpendel der Länge ℓ hängt wird um den Winkel α ausgelenkt und dann losgelassen. Berechne Sie allgemein die Geschwindigkeit v der Kugel im Punkt B.



Zunächst gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \Rightarrow \quad h = \ell\left(1-\cos\alpha\right)$$

Energieansatz:

$$E_{Ges}^{A} = E_{Ges}^{B}$$

$$E_{pot}^{A} + \underbrace{E_{kin}^{A}}_{0} = \underbrace{E_{pot}^{B}}_{0} + E_{kin}^{B}$$

$$mgh_A = \tfrac{1}{2} mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh_A}$$

$$v_B = \sqrt{2g\ell\left(1-\cos\alpha\right)}$$

6.0 Eine Kugel der Masse $m = 2{,}0\,\text{kg}$ rollt auf der horizontalen Strecke AB mit der konstanten Geschwindigkeit von $v_0 = 6{,}0\,\frac{m}{s}$. Bei B kommt die Kugel in eine nach oben führende Rinne BCD von Halbkreisform mit dem Radius $r = 0{,}50\,\text{m}$. Die Reibung und die Rotationsenergie der Kugel sollen vernachlässigt werden.

6.1 Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit die Kugel im Punkt C bzw. D hat. In welche Richtung zeigt der Geschwindigkeitsvektor?

$$E_{Ges(A)} = E_{Ges(C)}$$

$$E_{kin(A)} + \underbrace{E_{pot(A)}}_{0} = E_{kin(C)} + E_{pot(C)}$$

$$E_{kin(C)} = E_{kin(A)} - E_{pot(C)} = \tfrac{1}{2} mv_A^2 - mgh = \tfrac{1}{2} mv_A^2 - 2mgr = \ldots \approx 16\,\text{J}$$

$$E_{kin(C)} = \tfrac{1}{2} mv_C^2 = \tfrac{1}{2} mv_A^2 - 2mgr \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{v_A^2 - 2gr} = \ldots \approx 5{,}1\,\tfrac{m}{s}$$

$$v_D = 4{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

6.2 Dieselbe Kugel wird mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 6{,}0\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen. Ermitteln Sie, welche Geschwindigkeit die Kugel in einer Höhe von $h = 1{,}0\,\text{m}$ hat? In welcher Höhe kehrt die Kugel um?

$$
\begin{aligned}
E_{Ges(v)} &= E_{Ges(n)} \\
E_{kin(v)} + \underbrace{E_{pot(v)}}_{0} &= E_{kin(n)} + E_{pot(n)} \\
\tfrac{1}{2} m v_v^2 &= \tfrac{1}{2} m v_n^2 + mgh \\
v_n^2 &= v_v^2 - 2gh \quad \Rightarrow \quad v_n = \sqrt{v_v^2 - 2gh} = \ldots \approx 4{,}0\,\tfrac{m}{s}
\end{aligned}
$$

Sie kehrt um, wenn $E_{kin(n)} = 0 \;\Rightarrow\; v_n = 0 \;\Rightarrow\; v_v^2 = 2gh \;\Rightarrow\; h = \dfrac{v_v^2}{2g} = \ldots \approx 1{,}8\,m$

6.3 Welche Fallgeschwindigkeit hat die Kugel, nachdem Sie wieder $1{,}0\,m$ heruntergefallen ist?

Aus $v_n = \sqrt{v_v^2 - 2gh}$ folgt mit $h = \dfrac{v_v^2}{2g} - 1{,}0\,m$:

$$v_n = \sqrt{v_v^2 - 2gh} = \sqrt{v_v^2 - 2g\left(\frac{v_v^2}{2g} - 1{,}0\,m\right)} = \sqrt{2g \cdot 1{,}0\,m} = \ldots \approx 4{,}4\,\tfrac{m}{s}$$

7.0 Eine Federpistole kann mit der Kraft $F = 50\,N$ gespannt werden, wobei die Feder dabei um $s = 8{,}0\,cm$ verkürzt wird.

7.1 Welche maximale Steighöhe erreicht ein senkrecht abgeschossener Pfeil mit der Masse $m = 20\,g$?

$$
\begin{aligned}
E_{Ges(v)} &= E_{Ges(n)} \\
\underbrace{E_{kin(v)}}_{0} + E_{pot(v)} &= \underbrace{E_{kin(n)}}_{0} + E_{pot(n)} \\
\tfrac{1}{2} D s^2 &= mgh \qquad \text{mit } D = \tfrac{F}{s} \\
h &= \frac{Fs}{2mg} = \ldots \approx 10\,m
\end{aligned}
$$

7.2 Welche Energieumwandlungen spielen sich bei dem Vorgang ab?

Potentielle Energie der Elastizität $\leftrightarrow$ kinetische Energie $\leftrightarrow$ kinetische Energie + potentielle Energie der Lage $\leftrightarrow$ potentielle Energie $\leftrightarrow$ kinetische Energie + potentielle Energie der Lage

7.3 Welche Anfangsgeschwindigkeit hat das Geschoss?

$$
\begin{aligned}
E_{Ges(v)} &= E_{Ges(n)} \\
\underbrace{E_{kin(v)}}_{0} + E_{pot(v)} &= E_{kin(n)} + \underbrace{E_{pot(n)}}_{0} \\
\tfrac{1}{2} D s^2 &= \tfrac{1}{2} m v_n^2 \qquad \text{mit } D = \tfrac{F}{s} \\
v_n &= \sqrt{\frac{Fs}{m}} = \ldots \approx 14\,\tfrac{m}{s}
\end{aligned}
$$

8. Auf einer Tischplatte ist eine lotrechte Spiralfeder $\left(D = 40\,\frac{N}{cm}\right)$ befestigt. Senkrecht über der Feder hängt eine Kugel $\left(m = 400g\right)$ in der Höhe $1{,}2m$. Diese Höhe ist vom oberen Federende bis zum tiefsten Kugelpunkt gemessen. Nun fällt die Kugel auf die Feder und staucht sie. (Seitliches Verbiegen ist durch eine Führung ausgeschlossen)
Berechne die maximale Stauchung s_{max} der Feder.

$$E_{pot}^{vorh} = E_{pot}^{nachh}$$

$$mg\left(h + s\right) = \tfrac{1}{2} Ds^2$$

$$\tfrac{1}{2} Ds^2 - mgs - mgh = 0$$

$$s_{1/2} = \frac{mg \pm \sqrt{\left(mg\right)^2 + 2Dmgh}}{D}$$

$$s_{1/2} = \frac{0{,}400\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{N}{kg} \pm \sqrt{\left(0{,}400\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{N}{kg}\right)^2 + 2 \cdot 40\,\frac{N}{cm} \cdot 0{,}400\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{N}{kg} \cdot 1{,}2\,m}}{40\,\frac{N}{cm}}$$

$$s_{1/2} = \begin{cases} 5{,}0 \cdot 10^{-2}\,m \\ \cancel{-4{,}8 \cdot 10^{-2}}\,m \end{cases}$$

9. Ein Schifahrer $\left(m = 75\,kg\right)$ fährt einen Hang aus einer Höhe von 50m herunter $\left(\alpha_{ab} = 25°\right)$ und den gegenüberliegenden Hang bis zu einer Höhe von 40m wieder hinauf $\left(\alpha_{auf} = 25°\right)$. Wie groß ist die mittlere Reibungskraft und die mittlere Reibungszahl, wenn der Gesamtweg $s = 500\,m$ beträgt?

$$W_R = \Delta E \quad \Rightarrow \quad F_R \cdot s = E_{pot}^{v} - E_{pot}^{n} \quad \Rightarrow \quad F_R \cdot s = mg(H - h) \;\Rightarrow F_R = \frac{mg(H-h)}{s}$$

$$F_R = \frac{75kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 10m}{500m} = 14{,}715N \approx 15N$$

$$F_R = \mu \cdot F_N = \mu mg \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow \mu = \frac{F_R}{mg \cdot \cos\alpha} = \frac{\frac{mg(H-h)}{s}}{mg \cdot \cos\alpha} = \frac{H-h}{s \cdot \cos\alpha}$$

$$\mu = \frac{10m}{500m \cdot \cos 25°} = 0{,}022$$

10. Ein Eisenbahnzug von $m = 4{,}0 \cdot 10^5\,\text{kg}$ wird abgebremst und vermindert auf einer Strecke von $x = 1{,}0\,\text{km}$ seine Geschwindigkeit von $v_0 = 7{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf $v_1 = 4{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wie groß war die Bremskraft und die dem System verlorengegangene Energie?

$$2a_B s = v_1^2 - v_0^2 \;\Rightarrow a_B = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s}$$

$$F_B = ma_B = m\frac{v_1^2 - v_0^2}{2s} = 4{,}0 \cdot 10^5\,\text{kg} \cdot \frac{(4{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - (7{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 1000\text{m}} = -6600\,\text{N} = -6{,}6 \cdot 10^3\,\text{N}$$

$$\Delta E = E_{kin}^n - E_{kin}^v = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}0 \cdot 10^5\,\text{kg}\left(\left(4{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(7{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right) = -6{,}6 \cdot 10^6\,\text{J}$$

11.0 Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen.

11.1 Stelle Sie die kinetische und die potentielle Energie in Abhängigkeit von der Wurfzeit t dar.

Für die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Flugzeit t gilt: $v(t) = v_0 - gt$

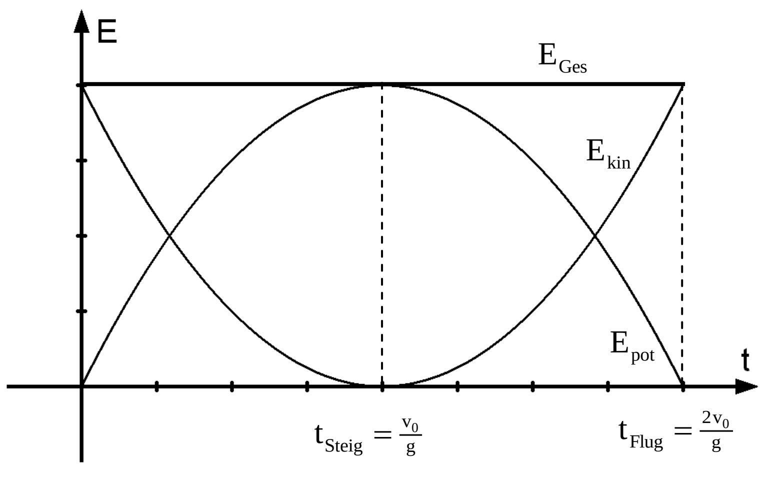
Eingesetzt in $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$:

$$E_{kin}(t) = \tfrac{1}{2}m\left(v_0 - gt\right)^2 = \tfrac{1}{2}m\left(v_0^2 - 2v_0gt + g^2t^2\right) = \tfrac{1}{2}mg^2t^2 - mv_0gt + \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

Für die Höhe h in Abhängigkeit von der Flugzeit t gilt: $h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

Eingesetzt in $E_{pot} = mgh$:

$$E_{pot}(t) = mg\left(v_0t - \tfrac{1}{2}gt^2\right) = -\tfrac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t$$



11.2 Zeige, dass für den Zeitpunkt, zudem die kinetische Energie genau so groß ist wie die potentielle Energie, gilt:

$$t_{1/2} = \left(1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \tfrac{v_0}{g}$$

Es gilt:

$$E_{kin}(t) = E_{pot}(t)$$

$$\tfrac{1}{2} mg^2t^2 - mv_0gt + \tfrac{1}{2} mv_0^2 = -\tfrac{1}{2} mg^2t^2 + mgv_0t$$

$$\underset{a}{g^2}\, t^2 \underbrace{-2v_0g}_{b}\, t + \underset{c}{\tfrac{1}{2} v_0^2} = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{2v_0g \pm \sqrt{(2v_0g)^2 - 4g^2 \cdot \frac{1}{2} v_0^2}}{2g^2} = \frac{2v_0g \pm \sqrt{4v_0^2g^2 - 2v_0^2g^2}}{2g^2} = \frac{2v_0g \pm \sqrt{2v_0^2g^2}}{2g^2}$$

$$t_{1/2} = \frac{2v_0g \pm v_0g \cdot \sqrt{2}}{2g^2} = \left(1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{v_0}{g}$$

12. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 hat ein senkrecht nach oben abgeschossenes Teilchen, wenn in der Höhe $h = 2000\,\text{m}$ kinetische und potentielle Energie gleich groß sind?

$$E_{Ges(v)} = E_{Ges(n)}$$

$$E_{kin(v)} + \underset{0}{E_{pot(v)}} = E_{kin(n)} + E_{pot(n)} \quad \text{mit } E_{kin(n)} = E_{pot(n)}$$

$$E_{kin(v)} = 2E_{pot(n)}$$

$$\tfrac{1}{2} mv_v^2 = 2mgh \quad \Rightarrow \quad v_v = 2\sqrt{gh} = \ldots \approx 280{,}1\,\tfrac{m}{s} \approx 1009\,\tfrac{km}{h}$$

13. Eine Kugel fällt aus einer bestimmten Höhe frei herunter und kommt am Boden mit der Geschwindigkeit v an. In welcher Zwischenhöhe h_1 hat sie gerade den halben Betrag der Endgeschwindigkeit? Geben Sie h_1 in Abhängigkeit von h an.

$$E_{Ges(v)} = E_{Ges(n)}$$

$$\underset{0}{E_{kin(v)}} + E_{pot(v)} = E_{kin(n)} + E_{pot(n)}$$

$$mgh = \tfrac{1}{2} mv_n^2 + mgh_1 \quad \text{aus } mgh = \tfrac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_n = \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2}\sqrt{2gh}$$

$$gh = \tfrac{1}{4} gh + gh_1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{3}{4} gh = gh_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \tfrac{3}{4} h$$