

## § 4 Arbeit

### Aufgaben:

1.0 Ein Airbus A380 der Masse  $m = 560\text{t}$  ist mit 4 Triebwerken von je  $F_T = 347\text{kN}$  Schubkraft ausgestattet. Während der Fahrt auf der waagrechten Startbahn liefern die Triebwerke kontinuierlich die volle Schubkraft.

1.1 Welche Arbeit erbrachten die Triebwerke, wenn das Flugzeug nach einer Strecke von  $x_s = 1,5\text{km}$  abhebt?

$$W_{\text{Schub}} = F_{\text{Schub}} \cdot s = 4 \cdot F_T \cdot s = 4 \cdot 347 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1500 \text{ m} = 2,1 \cdot 10^9 \text{ J} = 2,1 \text{ GJ}$$

1.2 Wie groß ist die Endgeschwindigkeit  $v_E$  des Flugzeugs auf der Startbahn, wenn man die Reibungskräfte außer Acht lässt?

$$\begin{aligned} W_a &= W_{\text{Schub}} \\ \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) &= W_{\text{Schub}} \\ \frac{1}{2} m v^2 &= W_{\text{Schub}} \\ v^2 &= \frac{2W_{\text{Schub}}}{m} \\ v &= \sqrt{\frac{2W_{\text{Schub}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,1 \cdot 10^9 \text{ J}}{560 \cdot 10^3 \text{ kg}}} \approx 87 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \left( 312 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \end{aligned}$$

2. Ein Kind zieht einen Leiterwagen mit dem konstanten Kraftaufwand von  $F_Z = 150\text{N}$ . Dabei wirkt eine Kraft in Richtung der Deichsel, die einen Winkel von  $\alpha = 40,0^\circ$  gegen die horizontale Straße bildet. Berechnen Sie, welche Arbeit das Kind verrichtet, wenn es den Wagen eine Strecke von  $x_s = 0,750\text{km}$  weit zieht ?

$$W = F \cdot s = F_Z \cdot \cos \alpha \cdot x_s = 150 \text{ N} \cdot \cos 40,0^\circ \cdot 750 \text{ m} \approx 86 \text{ kJ}$$

3.0 Ein Lastenaufzug befördert eine Last der Masse  $m = 2,4\text{t}$  senkrecht nach oben und erteilt ihr während einer Zeit von  $t_1 = 8,0\text{s}$  eine Beschleunigung von  $a = 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

3.1 Berechnen Sie die vom Aufzug bewältigte Hubarbeit?

Zunächst benötigt man die Höhe  $h$ :

$$\text{Es gilt: } h(t) = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow h(t_1) = \frac{1}{2} \cdot 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (8,0\text{s})^2 = 16 \text{ m} = h_1$$

$$W_{\text{Hub}} = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot (h_1 - h_0) \stackrel{h_0=0}{=} m \cdot g \cdot h_1$$

$$W_{\text{Hub}} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16 \text{ m} = 376704 \text{ J} \approx 3,8 \cdot 10^5 \text{ J}$$

3.2 Berechnen Sie die vom Aufzug bewältigte Beschleunigungsarbeit?

Zunächst benötigt man die Endgeschwindigkeit:

$$\text{Es gilt: } v(t) = a \cdot t \Rightarrow v(8,0\text{s}) = 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8,0\text{s} = 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_1$$

$$W_a = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \stackrel{v_0=0}{=} \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \left(4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 19200 \text{ J} \approx 1,9 \cdot 10^4 \text{ J}$$

3.3 Welche Gesamtarbeit hat der Aufzug bewältigt?

$$W_{\text{Ges}} = W_{\text{Hub}} + W_a = 376704 \text{ J} + 19200 \text{ J} = 395904 \text{ J} \approx 4,0 \cdot 10^5 \text{ J}$$

4.0 Ein Roboter mit  $m = 0,5 \text{ t}$  wird aus dem Stand längs der Strecke  $x_0 = 2,0 \text{ m}$  mit der Beschleunigung  $a = 0,10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  bewegt.

4.1 Berechnen Sie, welche Arbeit der Roboter dabei verrichtet?

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \Rightarrow v = \sqrt{2ax_0}$$

$$W_{\text{Beschl}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2ax_0 = max_0 = 500 \text{ kg} \cdot 0,10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,0 \text{ m} = 0,10 \text{ kJ}$$

4.2 Nun hebt der Roboter seinen Schwerpunkt dabei noch gleichzeitig um  $x_s = 1,5 \text{ m}$ . Berechnen Sie, welche Arbeit der Roboter nun verrichtet?

$$W = W_{\text{Hub}} + W_{\text{Beschl}} = mgx_s + max_0 = \dots = 7357,5 \text{ J} + 100 \text{ J} \approx 7,5 \text{ kJ}$$

5.0 Ein Rammklotz zum Eintreiben von Spundwänden hat eine Masse von  $m = 2500 \text{ kg}$ . Er wird um  $h = 4,50 \text{ m}$  angehoben und fällt dann frei auf das obere Ende der Spundwand.

5.1 Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit der Rammklotz kurz vorm Auftreffen auf die Spundwand hat?

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 9,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.2 Ermitteln Sie, wie groß die mittlere Kraft ist mit der die Spundwand in den Boden gerammt wird, wenn die Wand pro Schlag um  $s = 5,0 \text{ cm}$  tiefer in den Boden einsinkt?

$$W_{\text{Beschl}} = F \cdot s \Rightarrow F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{mgh}{s} = \dots \approx 2,2 \text{ MN}$$

6.0 Ein Junge ( $m_j = 35 \text{ kg}$ ) zieht einen Schlitten einen schneebedeckten Hang hinauf. Der Hang hat eine Länge von  $\ell = 200 \text{ m}$  und bildet mit der Horizontalen einen Winkel von  $\alpha = 20^\circ$ . Der Schlitten hat eine Masse von  $m_s = 5,0 \text{ kg}$ , die Reibungszahl beträgt  $\mu = 0,10$ .

6.1 Berechnen Sie, welche Arbeit der Junge aufwenden muss um den Schlitten hochzuziehen?

$$W_R = F_R \cdot s = \mu mg \ell \cos \alpha$$

$$W_{\text{Hub}} = mgh = mg \ell \sin \alpha$$

$$W_{\text{Ges}} = W_R + W_{\text{Hub}} = \mu mg \ell \cos \alpha + mg \ell \sin \alpha = mg \ell (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) = \dots \approx 4,3 \text{ kJ}$$

6.2 Der Junge setzt sich nun auf den Schlitten und fährt den Berg hinunter. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit er am Fuße des Berges ankommt?

$$v = \sqrt{2g\ell(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = \dots \approx 31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$