

§ 3 Gesetze von Newton und ihre Anwendungen

Aufgaben zum 2. Newtonschen Gesetz

1. Ein Körper hat die Masse 200kg. Welche Kraft wirkt auf ihn, wenn er die Beschleunigung $6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ erhält?

$$F = m \cdot a = 200 \text{ kg} \cdot 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{1,20 \text{ kN}}}$$

2. Ein Skispringer (Gesamtmasse 80kg) wird beim Anfahren bis zum Schanzentisch in 5,0s von 0 auf $92 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beschleunigt. Wie groß ist die mittlere beschleunigende Kraft?

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{v_n - v_v}{\Delta t} = 80 \text{ kg} \cdot \frac{(92 : 3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5,0 \text{ s}} = \underline{\underline{0,41 \text{ kN}}}$$

3. Ein Omnibus (Gesamtmasse 14t) wird 5,0s lang mit der Kraft 10kN beschleunigt. Welche Geschwindigkeit hat er am Ende der Beschleunigungszeit, wenn er zu Beginn der Beschleunigung mit der Geschwindigkeit $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fuhr?

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{v_n - v_v}{\Delta t} \Rightarrow v_n = \frac{F \cdot \Delta t}{m} + v_v$$

$$v_n = \frac{10000 \text{ N} \cdot 5,0 \text{ s}}{14000 \text{ kg}} + (70 : 3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 23,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{83 \frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

4. Ein Körper hat die Masse 3,5kg. Er ruht auf einer horizontalen Unterlage und kann sich auf dieser reibungsfrei bewegen. Auf ihn wirkt eine konstante Kraft horizontal, sodass er nach einem Weg von 5,0m die Geschwindigkeit $0,80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erreicht.

- a) Wie groß ist die Beschleunigung?

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \begin{matrix} v_0=0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad a = \frac{v^2}{2x} = \frac{(0,80 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 5,0 \text{ m}} = 0,064 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{6,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

- b) Wie groß ist die Kraft?

$$F = m \cdot a = 3,5 \text{ kg} \cdot 0,064 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{0,22 \text{ N}}}$$

- c) Nach welcher Zeit hat der Körper die Geschwindigkeit $0,80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erreicht?

$$v(t) = v_0 + at \quad \begin{matrix} v_0=0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad v(t) = at$$

$$v(t_n) = a \cdot t_n = v_n \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{v_n}{a} = \frac{0,80 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,064 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{13 \text{ s}}}$$

- d) Welchen Weg hat der Körper nach 5,0s zurückgelegt und wie groß ist dann seine Momentangeschwindigkeit?

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad \begin{matrix} x_0=0 \\ v_0=0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad x(t) = \frac{1}{2} at^2$$

$$x = x(5,0 \text{ s}) = \frac{1}{2} \cdot 0,064 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5,0 \text{ s})^2 = \underline{\underline{0,80 \text{ m}}}$$

$$v(t) = v_0 + at \quad \begin{matrix} v_0=0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad v(t) = at$$

$$v_n = 0,064 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5,0 \text{ s} = \underline{\underline{0,32 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

5. Ein Fußball ($m_B = 430\text{ g}$) fliegt bei einem Elfmeterschuss mit etwa $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf das Tor zu.

a) Berechne die Bremskraft, wenn der Ball dem Torwart direkt auf die Brust trifft und man in diesem Fall für den Bremsweg 10 cm ansetzt

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \stackrel{v=0}{\Rightarrow} \quad -v_0^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-v_0^2}{2x}$$

$$F_B = m_B \cdot a = -\frac{m_B \cdot v_0^2}{2x} = -\frac{430\text{ g} \cdot (100 : 3,6)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 0,10\text{ m}} = \underline{\underline{-1,7 \cdot 10^3\text{ N}}}$$

b) Wie groß ist die Masse eines Körpers, dessen Gewichtskraft gleich der in a) berechneten Bremskraft ist?

$$F_B = F_G = m_K \cdot g \quad \Rightarrow \quad m_K = \frac{F_B}{g} = \frac{1,66 \cdot 10^3\text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1,7 \cdot 10^2\text{ kg}$$

6. Ein Motorrad erreicht auf ebener Straße vom Stand aus in $4,0\text{ s}$ die Geschwindigkeit $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; Fahrer und Maschine haben zusammen eine Masse von 300 kg

a) Welche (durchschnittliche) Beschleunigung wurde dabei erreicht?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_e - v_0}{\Delta t} \stackrel{v_0=0}{=} \frac{v_e}{\Delta t} = \frac{(100 : 3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,0\text{ s}} = \underline{\underline{6,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

b) Welche (durchschnittliche) Kraft wirkte dabei beschleunigend?

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{v_e}{\Delta t} = 300\text{ kg} \cdot \frac{(100 : 3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,0\text{ s}} = \underline{\underline{2,1\text{ kN}}}$$

c) Welche (durchschnittliche) Beschleunigung wird erreicht, wenn noch zusätzlich eine Person der Masse $m_p = 60\text{ kg}$ auf dem Motorrad sitzt? Dabei soll angenommen werden, dass die beschleunigende Kraft gleich der in Teilaufgabe b) ist. In welcher Zeit wird jetzt die Geschwindigkeit $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht?

$$F = (m + m_p) \cdot a_{\text{neu}} \quad \Rightarrow \quad a_{\text{neu}} = \frac{F}{m + m_p} = \frac{2100\text{ N}}{300\text{ kg} + 60\text{ kg}} = \underline{\underline{5,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$a_{\text{Neu}} = \frac{\Delta v}{\Delta t_{\text{Neu}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{\text{Neu}} = \frac{\Delta v}{a_{\text{Neu}}} = \frac{v_e}{a_{\text{Neu}}} = \frac{(100 : 3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{4,8\text{ s}}}$$

d) Leiten Sie für die Aufgabe c) eine allgemeine Endformel her.

$$a = \frac{v_e}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad F = m \cdot a = m \cdot \frac{v_e}{\Delta t} \quad (1)$$

$$F = (m + m_p) \cdot a_{\text{neu}} = (m + m_p) \cdot \frac{v_e}{\Delta t_{\text{neu}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{\text{neu}} = \frac{(m + m_p) \cdot v_e}{F} \quad (2)$$

$$(1) \text{ in } (2): \Delta t_{\text{neu}} = \frac{(m + m_p) \cdot v_e}{m \cdot \frac{v_e}{\Delta t}} = \frac{m + m_p}{m} \cdot \Delta t = \left(1 + \frac{m_p}{m}\right) \cdot \Delta t$$

7. Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der Fahrer muss plötzlich voll abbremsen. Nach 18m kommt das Auto zum Stehen.

a) Wie groß ist die mittlere Verzögerung bei dem Bremsvorgang?

$$v^2 - v_0^2 = 2as \quad \stackrel{v=0}{\Rightarrow} \quad -v_0^2 = 2as \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-v_0^2}{2s} = -\frac{(60:3,6)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 18 \text{m}} = \underline{\underline{-7,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

b) Wie groß ist die mittlere Bremskraft auf den Fahrer ($m = 75\text{kg}$)? Vergleiche diese Kraft mit der Gewichtskraft F_G des Fahrers.

$$F_B = m_B \cdot a = -\frac{m_B \cdot (-v_0^2)}{2s} = -\frac{75 \text{kg} \cdot \left(-\left(60:3,6\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right)}{2 \cdot 18 \text{m}} = \underline{\underline{-0,58 \text{kN}}}$$

$$\frac{|F_B|}{F_g} = \frac{580 \text{N}}{75 \text{kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,79$$

Die Bremskraft entspricht somit 79% der Gewichtskraft des Fahrers

8. In der Startphase zum 100 m-Lauf erreicht ein Athlet ($m = 80\text{kg}$) am Ende der ersten 5m die Geschwindigkeit $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Welche mittlere Kraft muss der Athlet dabei aufbringen?

$$v^2 - v_0^2 = 2as \quad \stackrel{v_0=0}{\Rightarrow} \quad a = \frac{v^2}{2s}$$

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{2s} = 80 \text{kg} \cdot \frac{\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 5 \text{m}} = \underline{\underline{0,2 \text{kN}}}$$

9. Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ gegen einen starren Betonpfeiler. Das Autowrack kommt nach 0,10s zum Stehen. In der Regel ist ein solcher Auffahrunfall für Fahrer und Fahrgäste tödlich.

a) Wie groß ist bei dem Unfall die mittlere Verzögerung?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_e - v_0}{\Delta t} \stackrel{v_e=0}{=} -\frac{v_0}{\Delta t} = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,10 \text{s}} = -200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{-2,0 \cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

b) Das wie vielfache der Gewichtskraft des Fahrers ist dabei die auf ihn wirkende Bremskraft?

$$\frac{F_B}{F_G} = \frac{m \cdot a_B}{m \cdot g} = \frac{a_B}{g} = \frac{200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 20$$

Das entspricht der 20-fachen Gewichtskraft des Fahrers.

10. Eine B747 (Jumbo) hat die Gesamtmasse $3,2 \cdot 10^5 \text{kg}$. Die maximale Schubkraft der vier Triebwerke ist insgesamt $F_{\text{max}} = 8,8 \cdot 10^5 \text{N}$. Für den Start wird aus Sicherheitsgründen mit einer Schubkraft von $F_s = 8,0 \cdot 10^5 \text{N}$ gerechnet. Während der Startphase müssen Rollreibungs- und Luftwiderstandskräfte überwunden werden, die im Mittel zusammen $F_R = 2,5 \cdot 10^5 \text{N}$ betragen. Der Jumbo beginnt zu fliegen, wenn er eine Geschwindigkeit von $v = 300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht hat.

a) Wie lange dauert der Start?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a} = \frac{v}{\frac{F_{\text{eff}}}{m}} = \frac{v \cdot m}{F_s - F_R} = \frac{\left(300:3,6\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,2 \cdot 10^5 \text{kg}}{8,0 \cdot 10^5 \text{N} - 2,5 \cdot 10^5 \text{N}} = 48 \text{s}$$

b) Wie lange muss die Startbahn mindestens sein?

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \overset{v_0=0}{\Rightarrow} \quad x = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2 \frac{F_{\text{eff}}}{m}} = \frac{mv^2}{2(F_S - F_R)}$$

$$x = \frac{3,2 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \left((300 : 3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2(8,0 \cdot 10^5 \text{ N} - 2,5 \cdot 10^5 \text{ N})} = 2,0 \text{ km}$$

c) Aus Sicherheitsgründen sind die Startbahnen etwa 3,0km lang. Welche Schubkraft reicht bei dieser Startbahnlänge aus? Würde der Start noch gelingen, wenn eines der vier Triebwerke ausfällt?

$$x = \frac{mv^2}{2(F_S - F_R)}$$

$$2(F_S - F_R) \cdot x = mv^2$$

$$F_S - F_R = \frac{mv^2}{2x}$$

$$F_S = \frac{mv^2}{2x} + F_R$$

$$F_S = \frac{3,2 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \left((300 : 3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 3000 \text{ m}} + 2,5 \cdot 10^5 \text{ N} = 6,2 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Der Start würde noch gelingen, der Pilot müsste aber dabei die verbleibenden drei Triebwerke mit maximaler Schubkraft betreiben.