Einführung in die Fehlerrechnung

1. Der wahrscheinlichste Messwert

Im Praktikum müssen physikalische Größen gemessen werden. Die Qualität der gemessenen Größen spielt aber eine wichtige Rolle. Nur ein hohe Qualität der Messungen liefert ein brauchbares Ergebnis des Experiments aus welchem dann auf die Gültigkeit eines theoretischen Modells geschlossen werden kann.
Grundsätzlich ist jede Messung einer physikalischen Größe mit Fehlern (Abweichungen) behaftet. Deshalb muss in jedem Praktikumsbericht neben dem Messergebnis auch die Angabe der Messunsicherheit vorhanden sein, d.h. die Angabe des Intervalls in dem mit einiger Sicherheit das Messergebnis liegt.
Üblicherweise wird das Messergebnis einer Größe x folgendermaßen angegeben:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

Dabei ist $\bar{x}$ der „wahrscheinlichste“ oder „beste Schätzwert“ für das Messergebnis, Δx gibt die absolute Messunsicherheit an.
Obige Angabe bedeutet also, dass das Messergebnis mit ziemlicher Sicherheit im Intervall

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

liegt.

2. Messfehler

Nun lassen sich bei Messungen Fehler machen. Man unterscheidet drei verschiedene Arten von Messfehlern.

2.1 Grobe Messfehler

Grobe Messfehler sind eigentlich „unerlaubte Fehler“. Sie kommen durch einen Mangel an Konzentration zustande.
Ursachen für grobe Fehler:

- Unachtsamkeit
- Versehen des Beobachters bei der Bedienung der Messapparatur
- Falsches Ablesen der Messinstrumente
- Messverfahren oder Messbedingungen sind ungeeignet
- Irrtum des Beobachters bei der Protokollierung bzw. bei der Auswertung der Messwerte.

In diesen Fällen sind die Messungen oder Auswertungen falsch und müssen wiederholt werden. Diese Fehler lassen sich durch eine mathematische Theorie nicht erfassen und werden deshalb hier nicht weiter verfolgt.

2.2 Systematische Fehler

Diese Fehlerart wird durch das Messgerät oder die Messmethode hervorgerufen, sie beeinflussen das Messergebnis unter identischen Bedingungen stets im gleichen Sinne.
Ursachen für systematische Fehler:

- Eichfehler bei den Massestücken
- Ungenaue Einteilung einer Messskala
- Verwendung falscher Messinstrumente
- Falsche elektrische Schaltung
- Alterung der Messgeräte
- Überschreiten der Gültigkeitsgrenzen
- Äußere Einflüsse (Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Luftdruck, ...)
- Rückwirkung von Messinstrumenten auf die Messung

Systematische Fehler werden nur schwer erkannt und können nur teilweise ausgeschaltet bzw. korrigiert werden.
Hat man jedoch in einem bestimmten Fall den systematischen Fehler erkannt, so kann man unter Umständen die Messwerte mit einer Korrektur versehen. Die Abweichungen der Messergebnisse vom richtigen Wert liegen immer in der gleichen Richtung. Es ist entweder immer zu groß oder stets zu klein.

2.3 Zufällige Fehler

Bei optimalem Versuchsaufbau kann man davon ausgehen, dass die systematischen Fehler vernachlässigbar klein sind. Wiederholt man jetzt mehrmals die Messung, so stellt man eine Schwankung der Messwerte um einen „Mittelwert" fest.
Die Ursache dieser Schwankung liegt vor allem in der Unvollkommenheit unserer Sinnesorgane (Ablesefehler).
Ursachen für zufällige Fehler:

- Messungen mit der Stoppuhr (Reaktionszeit des Beobachters)
- Schätzungen und Interpolationen auf Messskalen
- Ableseabweichungen
- Reibung in einem Messinstrument
- Auflösungsvermögen der Messanordnung
- Zufällige und unvorhersehbare äußere Einflüsse (Temperatur, Luft, ...)
- Die Messgröße selbst besitzt einen stochastischen Charakter (radioaktiver Zerfall von Atomkernen, ...)

Diese Fehler sind prinzipiell nicht vermeidbar, gehorchen aber den Gesetzen der Statistik und lassen sich mathematisch erfassen.

3. Ein konkretes Beispiel

Jede Gruppe misst die Länge sowie die Breite des Gangs vor dem Physiksaal und trägt ihr Messergebnis in diese Tabelle ein. Sind alle Messungen durchgeführt wird die wahrscheinlichste Länge (Mittelwert) ermittelt und die absolute Messunsicherheit (absolute Fehler) bestimmt.

Nr.	ℓ_i in m	$\Delta\ell_i$ in m
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
	$\overline{\ell} =$	$\Delta\ell =$

Nr.	b_i in m	Δb_i in m
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
	$\overline{b} =$	$\Delta b =$

Dabei gilt:

$$\text{Mittelwert:} \quad \overline{\ell} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell_i \qquad \overline{b} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\text{absoluter Betrag der Abweichung vom Mittelwert:} \quad \Delta\ell_i = \left|\ell_i - \overline{\ell}\right| \qquad \Delta b_i = \left|b_i - \overline{b}\right|$$

$$\text{absoluter Fehler:} \quad \Delta\ell = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta\ell_i \qquad \Delta b = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta b_i$$

Somit folgt für die Länge bzw. die Breite des Ganges:

$$\ell = \overline{\ell} \pm \Delta\ell =$$

$$b = \overline{b} \pm \Delta b =$$

Das Messergebnis wird dabei stets einschließlich der ersten fehlertragenden Dezimalstelle angegeben. Eine Angabe von weiteren Dezimalstellen ist physikalisch sinnlos.

Um nun eine Aussage über die Güte der Messung zu machen wird der relative Fehler einer Messung angeben. Für diesen gilt:

$$\text{relativer Fehler bei der Länge:} \quad \frac{\Delta\ell}{\overline{\ell}} =$$

$$\text{relativer Fehler bei der Breite:} \quad \frac{\Delta b}{\overline{b}} =$$

4. Fehlerfortpflanzung bei Produkten

Sehr häufig kommt es vor, dass man aus zwei gemessenen, fehlerbehafteten Größen eine dritte Größe berechnen muss. Dabei ist klar, dass die zu berechnende Größe natürlich ebenfalls fehlerbehaftet sein wird.

Wir wollen zunächst untersuchen wie sich dieser Fehler beim Produkt zweier Messgrößen „fortpflanzt“. Dazu versuchen wir zunächst formal aus obigen Messgrößen die Fläche des Ganges vor dem Physiksaal zu bestimmen. Dabei werden natürlich die fehlerbehafteten Messgrößen berücksichtigt.

Die Fläche $A = \ell \cdot b$ berechnen wir aus den Messgrößen ℓ und b, für die gilt:

$$\ell = \overline{\ell} \pm \Delta\ell \text{ und } b = \overline{b} \pm \Delta b$$

Für die größtmögliche Fläche gilt dann:

$$A_{max} = \left(\overline{\ell} + \Delta\ell\right) \cdot \left(\overline{b} + \Delta b\right)$$

$$A_{max} = \overline{\ell} \cdot \overline{b} + \overline{\ell} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta\ell + \Delta\ell \cdot \Delta b$$

Das Produkt $\Delta\ell \cdot \Delta b$ ist im Vergleich zu den anderen sehr klein, so dass man es auch weglassen kann (liefert keinen nennenswerten Fehleranteil!).

Also bleibt:

$$A_{max} = \overline{\ell} \cdot \overline{b} + \overline{\ell} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta\ell$$

Für die kleinstmögliche Fläche gilt:

$$A_{min} = \left(\overline{\ell} - \Delta\ell\right) \cdot \left(\overline{b} - \Delta b\right)$$

$$A_{min} = \overline{\ell} \cdot \overline{b} - \overline{\ell} \cdot \Delta b - \overline{b} \cdot \Delta\ell + \Delta\ell \cdot \Delta b$$

Auch hier ist das Produkt $\Delta\ell \cdot \Delta b$ im Vergleich zu den anderen sehr klein, so dass man es ebenfalls weglassen kann.
Also bleibt:

$$A_{min} = \overline{\ell} \cdot \overline{b} - \left(\overline{\ell} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta\ell\right)$$

Dann folgt für den absoluten Fehler ΔA:

$$\Delta A = A_{max} - \overline{A} = \overline{\ell} \cdot \overline{b} + \overline{\ell} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta\ell - \overline{\ell} \cdot \overline{b} = \overline{\ell} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta\ell$$

bzw.

$$\Delta A = \overline{A} - A_{min} = \overline{\ell} \cdot \overline{b} - \left(\overline{\ell} \cdot \overline{b} - \left(\overline{\ell} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta\ell\right)\right) = \overline{\ell} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta\ell$$

Also beide male das gleiche.

$$\Delta A = \overline{\ell} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta\ell$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\overline{A} = \overline{\ell} \cdot \overline{b}$, so erhält man den relativen Fehler für die Fläche:

$$\frac{\Delta A}{\overline{A}} = \frac{\overline{\ell} \cdot \Delta b}{\overline{\ell} \cdot \overline{b}} + \frac{\overline{b} \cdot \Delta\ell}{\overline{\ell} \cdot \overline{b}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta A}{\overline{A}} = \frac{\Delta b}{\overline{b}} + \frac{\Delta\ell}{\overline{\ell}}}$$

Das heißt also, dass man den relativen Fehler für die Fläche aus der Summe der relativen Fehler aus der Länge und der Breite erhält.

Somit folgt für den relativen Fehler der Fläche A:

$$\frac{\Delta A}{\overline{A}} =$$

und für die mittlere Fläche $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \overline{\ell} \cdot \overline{b} =$$

Jetzt lässt sich der absolute Fehler ΔA der Fläche bestimmen:

$$\Delta A = \overline{A} \cdot \frac{\Delta A}{\overline{A}} =$$

Das Ergebnis für die Fläche A lautet dann:

$$A =$$

Ergebnis: Setzt sich eine physikalische Größe als Produkt zweier Messgrößen zusammen, so erhält man den relativen Fehler dieser Größe als Summe der relativen Fehler der Messgrößen.

Bemerkung: Kommt eine Messgröße quadratisch vor, so hat man den relativen Fehler zweimal zu addieren!

5. Fehlerfortpflanzung bei Quotienten

Die Fehlerfortpflanzung bei Quotienten wollen wir uns ebenfalls an einem Beispiel überlegen. Dazu wählen wir die Beziehung

$$v = \frac{x}{t}$$

Für die Messgrößen des Weges x und der Zeit t gilt dann:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x \text{ und } t = \overline{t} \pm \Delta t$$

Dann erhält man für den größtmöglichen Wert der Geschwindigkeit:

$$v_{max} = \frac{\overline{x} + \Delta x}{\overline{t} - \Delta t}$$

Dazu erweitern wir den Term mit $\overline{t} + \Delta t$ und erhalten:

$$v_{max} = \frac{\left(\overline{x} + \Delta x\right) \cdot \left(\overline{t} + \Delta t\right)}{\left(\overline{t} - \Delta t\right) \cdot \left(\overline{t} + \Delta t\right)} = \frac{\overline{x} \cdot \overline{t} + \overline{x} \cdot \Delta t + \overline{t} \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta t}{\overline{t}^2 - \left(\Delta t\right)^2}$$

Die beiden Terme $\Delta x \cdot \Delta t$ und $\left(\Delta t\right)^2$ sind im Vergleich zu den anderen Termen verschwindend klein, so dass wir sie (wie schon oben) einfach weglassen können. Somit erhalten wir:

$$v_{max} = \frac{\overline{x} \cdot \overline{t} + \overline{x} \cdot \Delta t + \overline{t} \cdot \Delta x}{\overline{t}^2}$$

Für den absoluten Fehler der Geschwindigkeit v folgt dann:

$$\Delta v = v_{max} - \overline{v}$$

$$\Delta v = \frac{\overline{x} \cdot \overline{t} + \overline{x} \cdot \Delta t + \overline{t} \cdot \Delta x}{\overline{t}^2} - \frac{\overline{x}}{\overline{t}}$$

$$\Delta v = \frac{\overline{x} \cdot \overline{t} + \overline{x} \cdot \Delta t + \overline{t} \cdot \Delta x - \overline{x} \cdot \overline{t}}{\overline{t}^2}$$

$$\Delta v = \frac{\overline{x} \cdot \Delta t + \overline{t} \cdot \Delta x}{\overline{t}^2}$$

Nun dividiert man durch $\overline{v}$ und erhält schließlich den relativen Fehler der Geschwindigkeit:

$$\frac{\Delta v}{\overline{v}} = \frac{\Delta v}{\frac{\overline{x}}{\overline{t}}} = \frac{\Delta v \cdot \overline{t}}{\overline{x}} = \frac{\left(\overline{x} \cdot \Delta t + \overline{t} \cdot \Delta x\right) \cdot \overline{t}}{\overline{x} \cdot \overline{t}^2} = \frac{\overline{x} \cdot \Delta t + \overline{t} \cdot \Delta x}{\overline{x} \cdot \overline{t}} = \frac{\Delta t}{\overline{t}} + \frac{\Delta x}{\overline{x}}$$

also:

$$\boxed{\frac{\Delta v}{\overline{v}} = \frac{\Delta t}{\overline{t}} + \frac{\Delta x}{\overline{x}}}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch wenn man obige Schritte für $v_{min} = \frac{\overline{x} - \Delta x}{\overline{t} + \Delta t}$ durchführt.

> Ergebnis: Setzt sich eine physikalische Größe als Quotient zweier Messgrößen zusammen, so erhält man den relativen Fehler dieser Größe ebenfalls als Summe der relativen Fehler der Messgrößen.

Beispiele vorgeben und Fehlerrechnung durchführen lassen!!!!!