AP 2011 II (Lösung)

1.1 Da der Satellit sich auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt gilt:

$$F_{Gr} = F_Z$$

$$G \cdot \frac{m_S \cdot m_E}{R^2} = m_S \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$G \cdot \frac{m_E}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot m_E}}$$

1.2.1 Ein Synchronsatellit ist ein Satellit, der von der Erde aus gesehen über demselben Ort stillzustehen scheint. Dazu müssen folgende drei Bedingungen erfüllt sein.

- Flugbahn muss in der Äquatorebene liegen (der Satellit kreist um den Mittelpunkt der Erde).
- Die Winkelgeschwindigkeit ω_S des Satelliten beim Umkreisen der Erde muss genau so groß sein, wie die Winkelgeschwindigkeit ω_E der Erde um die eigene Achse.
- Die Umlaufrichtung des Satelliten um die Erde muss der mit Drehrichtung der Erde übereinstimmen.

1.2.2 Nach Teilaufgabe 1.1 gilt: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}$

Mit $R = r_E + h$ folgt dann für die Höhe h:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot (r_E + h)^3}{G \cdot m_E}$$

$$\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2} = (r_E + h)^3$$

$$r_E + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}} - r_E$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600\,\mathrm{s})^2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{4\pi^2}} - 6{,}368 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = \underline{\underline{35{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}}$$

Für die Bahngeschwindigkeit v folgt somit:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot (r_E + h) = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \cdot \left(35{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 6{,}368 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\right) = \underline{\underline{3{,}07 \cdot 10^3\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \quad \left(= 3{,}07\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)$$

1.3.1 Für die Winkelgeschwindigkeit ω_M des Mondes gilt:

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M} = \frac{2\pi}{27,32 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 2,662 \cdot 10^{-6}\,\tfrac{1}{\mathrm{s}}$$

Für den Radius R_M der Umlaufbahn folgt mit Hilfe der Teilaufgabe 1.1 dann:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}$$

$$R^3 = \frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{(27,32 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s})^2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5,977 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{4\pi^2}} = \underline{\underline{3,832 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}}$$

1.3.2 In der Zeit t_N hat sich die Erde um den Winkel ρ um die Sonne gedreht. In dieser Zeit hat der Mond sich einmal um die Erde bewegt (2π) und zusätzlich noch den Winkel ρ zurückgelegt. Daher gilt für die zurückgelegten Winkel:

$$\text{Drehwinkel der Erde} + 2\pi = \text{Drehwinkel des Mondes}$$

$$\rho_E + 2\pi = \rho_M$$

$$\omega_E \cdot t_N + 2\pi = \omega_M \cdot t_N$$

$$2\pi = \omega_M \cdot t_N - \omega_E \cdot t_N$$

$$(\omega_M - \omega_E) \cdot t_N = 2\pi$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_E}\right) \cdot t_N = 2\pi$$

$$\left(\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_E}\right) \cdot 2\pi \cdot t_N = 2\pi$$

$$t_N = \frac{1}{\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_E}}$$

$$t_N = \frac{T_M \cdot T_E}{T_M + T_E}$$

$$t_N = \frac{27,32\,\mathrm{d} \cdot 365,25\,\mathrm{d}}{27,32\,\mathrm{d} + 365,25\,\mathrm{d}} = \underline{\underline{29,53\,\mathrm{d}}}$$

2.1 $E_{kin,0} = \frac{1}{2} m_P v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(4,8 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 1,9 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}\ (= 0,12\,\mathrm{MeV})$

2.2 Die elektrische Feldkraft F_{el} verrichtet die Arbeit W_{el} an den Protonen. Dadurch nimmt die kinetische Energie des Protons um die Energie ΔE_{kin} zu. Somit gilt:

$\Delta E_{kin} = W_{el} = e \cdot U_B \ \Rightarrow\ \Delta E_{kin} = e \cdot U_B$

2.3.1 Verlässt ein Proton die Triftröhre T_n, so muss zu diesem Zeitpunkt an dieser der Scheitelwert der positiven Wechselspannung und an der Triftröhre T_{n+1} der Scheitelwert der negativen Wechselspannung anliegen. Nun wird das Proton im Zwischenraum der Triftröhren beschleunigt. Nach der Zeit $\Delta t = \frac{1}{2}T = \text{konst.}$ (halbe Periodendauer) verlässt das Proton die Triftröhre T_{n+1}. An dieser muss nun der Scheitelwert der positiven Wechselspannung anliegen.
Da nun gilt $\Delta s = v \cdot \Delta t$ muss bei größerer werdender Geschwindigkeit v der Protonen der Weg Δs größer werden. Somit muss die Länge der Triftrohre von Triftrohr zu Triftrohr größer werden.

2.3.2 Beim Eintritt in die Triftröhre T_4 hat wurde das Proton viermal in den Zwischenräumen beschleunigt uns besitzt somit die kinetische Energie $E_{kin,4}$. Für diese gilt:

$$E_{kin,4} = E_{kin,0} + 4 \cdot \Delta E_{kin}$$

$$\tfrac{1}{2} m_P \cdot v_4^2 = E_{kin,0} + 4 \cdot e \cdot \hat{U}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(E_{kin,0} + 4 \cdot e \cdot \hat{U}\right)}{m_P}}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(1{,}9 \cdot 10^{-14}\,\text{J} + 4 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 0{,}80 \cdot 10^6\,\text{V}\right)}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}}} = \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^7\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Für die Länge ℓ_4 der vierten Triftröhre folgt dann nach 2.3.1:

$$\ell_4 = v_4 \cdot \Delta t = v_4 \cdot \tfrac{1}{2} T = v_4 \cdot \frac{1}{2f} = \frac{2{,}5 \cdot 10^7\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 50 \cdot 10^6\,\tfrac{1}{\text{s}}} = \underline{\underline{25\,\text{cm}}}$$

2.4.1 Bedingungen:
- Magnetfeld muss homogen und zeitlich konstant sein.
- Flussdichte $\vec{B}$ muss senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}_E$ gerichtet sein $\left(\vec{B} \perp \vec{v}_E\right)$
- Nach der Drei-Finger-Regel muss das Magnetfeld $\vec{B}$ aus der Zeichenebene heraus gerichtet sein.

2.4.2 Die Lorentzkraft $\vec{F}_L$, welche das Proton im Magnetfeld erfährt, ist die für die Bewegung des Protons auf dem Kreisbogen notwendige Zentralkraft $\vec{F}_Z$. Für deren Beträge gilt:

$$F_Z = F_L$$

$$m_P \cdot \frac{v_E^2}{r} = e \cdot v_E \cdot B$$

$$v_E = \frac{e \cdot r \cdot B}{m_P}$$

$$v_E = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 0{,}40\,\text{m} \cdot 0{,}700\,\text{T}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}} = \underline{\underline{2{,}7 \cdot 10^7\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Einheitenkontrolle: $\dfrac{\text{C} \cdot \text{m} \cdot \text{T}}{\text{kg}} = \dfrac{\text{As} \cdot \text{m} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{\text{kg}} = \dfrac{\text{VAs} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}}{\text{kg}} = \dfrac{\text{J} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}}{\text{kg}} = \dfrac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}}{\text{kg}} = \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

2.4.3 Aus $v_E = \frac{e \cdot r \cdot B}{m_P}$ (siehe 2.4.2) folgt: $r = \frac{m_P}{e \cdot B} \cdot v_E$

Da nun $\frac{m_P}{e \cdot B} = \text{konst.}$, muss bei größer werdender Geschwindigkeit v_E auch der Bahnradius r größer werden (und umgekehrt). Die Protonen gelangen somit nicht mehr durch die Lochblende.