2007 A III

1.1 Für alle Körper, die sich antriebslos auf einer Kreisbahn mit dem Radius R und der Umlaufdauer T um ein Zentralgestirn bewegen, gilt das dritte keplersche Gesetz $T^2 = C \cdot R^3$, wobei C eine Konstante ist.
Zeigen Sie mit Hilfe des Gravitationsgesetzes, dass die Konstante C nur von der Masse m_Z des Zentralgestirns abhängig ist.

1.2.0 Der Planet Venus hat die Masse $m_V = 4{,}87 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ und den Radius $r_V = 6{,}05 \cdot 10^6\,\text{m}$.

1.2.1 Berechnen Sie die Konstante C_V des dritten keplerschen Gesetzes für Körper, die sich antriebslos um die Venus bewegen.
$\left[\text{Ergebnis: } C_V = 1{,}21 \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}\right]$

1.2.2 Berechnen Sie den Betrag g_V der Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}_V$, die ein Körper an der Venusoberfläche erfährt.

1.3.0 Eine Sonde mit der Masse m_S bewegt sich antriebslos auf einer elliptischen Bahn um die Venus.
Im Punkt A der Ellipsenbahn ist der Abstand der Sonde zur Venusoberfläche am geringsten und beträgt $h_A = 250\,\text{km}$. Den Punkt A passiert die Sonde mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $v_A = 8{,}48\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

1.3.1 Die Umlaufdauer der Sonde auf der elliptischen Bahn beträgt $T = 3{,}16\,\text{h}$.
Im Punkt B erreicht die Sonde die größte Höhe h_B über der Venusoberfläche.
Berechnen Sie mit Hilfe der Konstanten C_V die Höhe h_B.
$\left[\text{Ergebnis: } h_B = 8{,}10 \cdot 10^6\,\text{m}\right]$

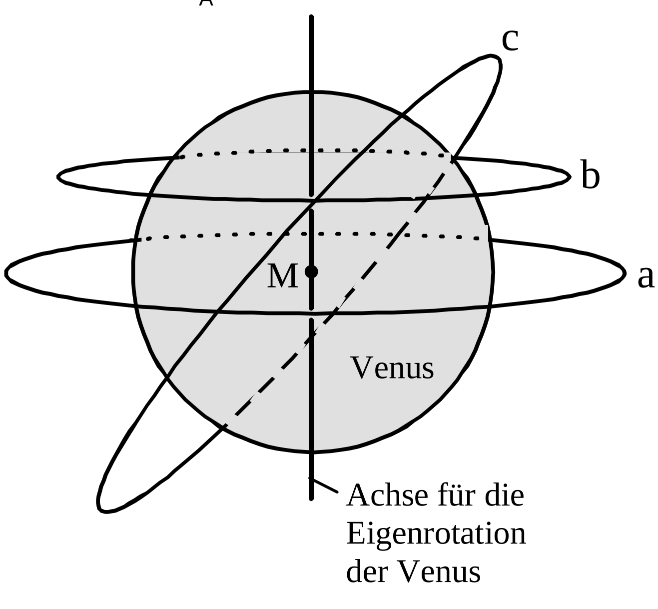
1.3.2 v_B ist der Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v}_B$, mit der die Sonde den Punkt B erreicht.
Zeigen Sie mithilfe des 2. keplerschen Gesetzes, dass gilt:

$$(r_V + h_A) \cdot v_A = (r_v + h_B) \cdot v_B \ .$$

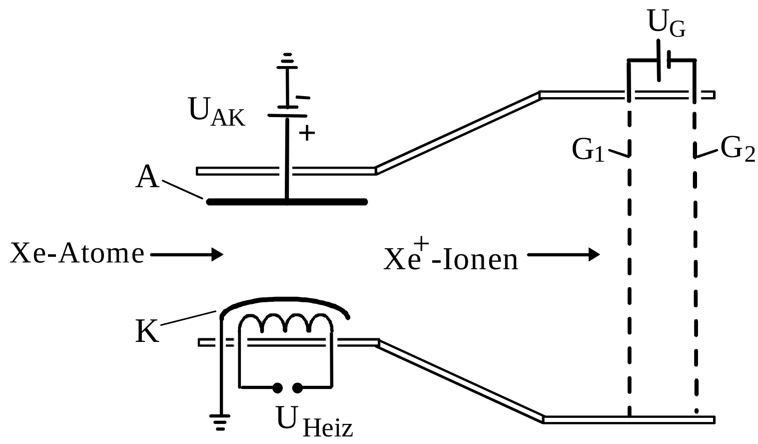
Berechnen Sie v_B.

1.3.3 Die Sonde wird durch ein geeignetes Steuermanöver im Punkt A von der elliptischen Bahn auf eine Kreisbahn in der Höhe $h_A = 250\,\text{km}$ über der Venusoberfläche gelenkt. Auf dieser Kreisbahn umrundet die Sonde dann die Venus ohne Antrieb. Bei diesem Steuermanöver wird der Betrag v der Geschwindigkeit der Sonde um Δv verändert.
Berechnen Sie Δv.

1.4 Geben Sie an, welche der drei nebenstehend skizzierten Kreisbahnen eine Sonde nicht ohne Antrieb durchlaufen kann. Begründen Sie Ihre Antwort.



2.0 Die Skizze zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Ionenantriebs für Raumsonden. Xenonatome gelangen in das elektrische Feld zwischen einer Glühkathode K und einer Anode A. Hier werden die Xenonatome durch Zusammenstoß mit Elektronen ionisiert. Die einfach positiv geladenen Xenonionen gelangen durch die Gitterelektrode G_1 in ein homogenes elektrisches Feld, das durch die Spannung U_G verursacht wird. Nachdem die Ionen die Spannung U_G durchlaufen haben, verlassen sie das Triebwerk durch eine zweite Gitterelektrode G_2.



Die gesamte Anordnung arbeitet im Vakuum.

2.1 Die Ionisierungsenergie für Xenonatome beträgt $E_I = 1{,}94 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$.
Aus der Kathode K treten die Elektronen mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit aus.
Berechnen Sie, wie groß die Spannung U_{AK} zwischen der Anode A und der Kathode K mindestens sein muss, damit die Elektronen Xenonatome ionisieren können

2.2.0 Ein Xenonion hat die Masse $m_X = 2{,}18 \cdot 10^{-25}\,\text{kg}$. Beim Eintritt in das elektrische Feld zwischen den beiden Gittern ist die Geschwindigkeit der Xenonionen vernachlässigbar klein. Ein Ion durchläuft hier die Spannung $U_G = 1{,}40\,\text{kV}$ und wird mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ durch das Gitter G_2 aus dem Triebwerk ausgestoßen.
Der Ionenantrieb erzeugt eine Schubkraft $\vec{F}$, deren Betrag F stufenlos im Bereich von $20\,\text{mN}$ bis $95\,\text{mN}$ regulierbar ist.

2.2.1 Die Gitter G_1 und G_2 haben den Abstand $d = 4{,}0\,\text{cm}$.
Berechnen Sie den Betrag F_{el} der elektrischen Kraft $\vec{F}_{el}$, die ein Xenonion im elektrischen Feld zwischen den beiden Gittern erfährt.

2.2.2 Leiten Sie eine Formel her, die den Zusammenhang zwischen dem Betrag v_2 der Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ und der Spannung U_G aufzeigt. Erläutern Sie dabei Ihren Lösungsansatz.

2.2.3 Erläutern Sie, wie die Schubkraft $\vec{F}$ zustande kommt.

2.2.4 Berechnen Sie die Anzahl N der Ionen, die pro Sekunde bei der maximalen Schubkraft durch das Gitter G_2 ausgestoßen werden.
$\left[\text{Ergebnis: } N = 9{,}6 \cdot 10^{18}\right]$

2.3 Die Sonde befindet sich in einem gravitationsfreien Raum. Die Sonde und der Vorrat an Xenongas besitzen die Gesamtmasse $m_S = 367\,\text{kg}$. Der Ionenantrieb erzeugt 10 Stunden lang die maximale Schubkraft mit dem Betrag $F_{max} = 95\,\text{mN}$ und beschleunigt dabei die Sonde aus der Ruhe heraus auf die Endgeschwindigkeit $\vec{v}_E$.

Bestätigen Sie, dass die Masse der Sonde für die Dauer des Beschleunigungsvorganges als konstant angesehen werden kann, und berechnen Sie den Betrag v_E der Endgeschwindigkeit $\vec{v}_E$.