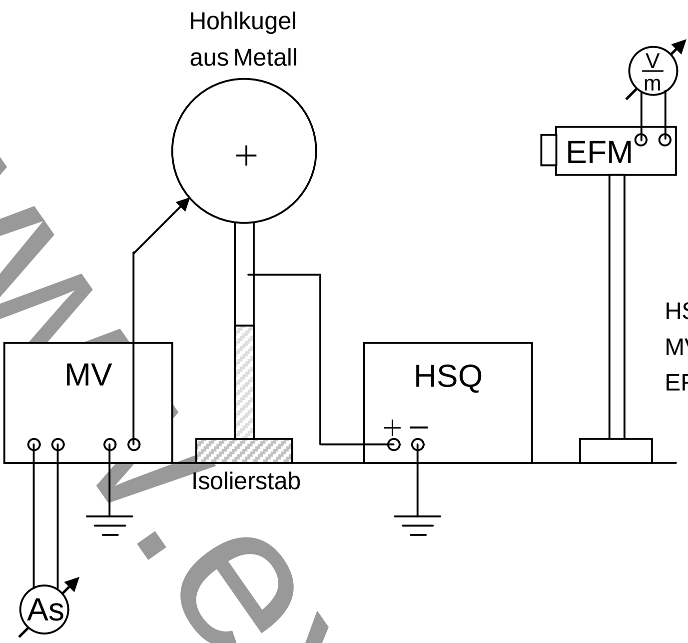
AP 2007 II (Lösung)

1.1



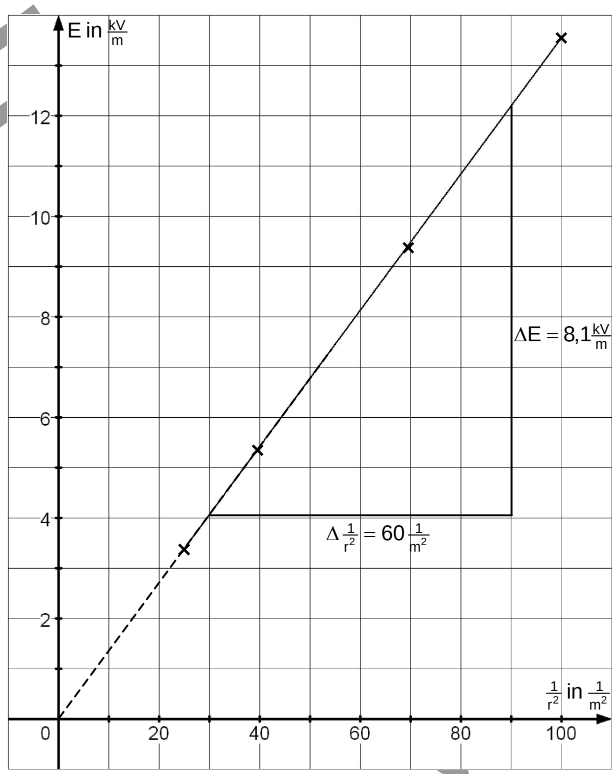
HSQ: Hochspannungsquelle
MV: Messverstärker
EFM: Elektrofeldmeter

1.2.1 Der Zusammenhang zwischen E und Q wird in den Messungen Nr. 2, 5, 6 und 7 untersucht.
Für den Zusammenhang zwischen E und Q gilt:

$$E \sim Q \text{ falls } r = \text{konstant}.$$

1.2.2 Zu ermitteln ist $E(r)$, dazu muss $Q = \text{konst.}$ sein.

Mess. Nr.	1	2	3	4
E in $\frac{kV}{m}$	13,5	9,4	5,3	3,4
r in cm	10,0	12,0	16,0	20,0
r^2 in $10^{-2}m^2$	1,00	1,44	2,56	4,00
$\frac{1}{r^2}$ in $\frac{1}{m^2}$	100	69,4	39,1	25,0



Im Rahmen der Messgenauigkeit liegen die Messwerte auf einer Ursprungshalbgeraden.

Somit folgt: $E \sim \frac{1}{r^2}$

1.2.3 $E \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow E = k \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow \Delta E = k \cdot \Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) \Rightarrow k = \frac{\Delta E}{\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right)}$

$$k = \frac{8{,}1 \cdot 10^3 \,\frac{V}{m}}{60\,\frac{1}{m^2}} = 1{,}35 \cdot 10^2\ Vm \approx 1{,}4 \cdot 10^2\ Vm$$

1.2.4 Es gilt:

$E = k \cdot \frac{1}{r^2}$ (1) aus 1.2.2

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$ (2) aus Formelsammlung

Durch gleichsetzen erhält man:

$$k \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{Q}{4\pi \cdot k} = \frac{15{,}0 \cdot 10^{-9}\ As}{4\pi \cdot 1{,}4 \cdot 10^2\ Vm} = 8{,}5 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm}$$

2.1 Für die Kapazität C_1 gilt:

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \underbrace{\varepsilon_r}_{1} \cdot \frac{A}{d_1} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\ell^2}{d_1} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm} \cdot \frac{(0{,}32\,m)^2}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ m} = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ F$$

Für die Ladung Q_1 folgt:

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ F \cdot 40\ V = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\ C$$

2.2 Es gilt: $Q = C \cdot U \Rightarrow U = \frac{Q}{C}$ (3)

Für die Änderung des Energieinhalts des elektrischen Feldes im Kondensator gilt:

$$\Delta W_{el} = W_2 - W_1 = \tfrac{1}{2}C_2U_2^2 - \tfrac{1}{2}C_1U_1^2 \overset{(3)}{=} \tfrac{1}{2} \cdot C_2 \cdot \left(\frac{Q_2}{C_2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \left(\frac{Q_1}{C_1}\right)^2 \overset{Q_1=Q_2}{=} \tfrac{1}{2} \cdot \frac{Q_1^2}{C_2} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{Q_1^2}{C_1}$$

$$\Delta W_{el} = \frac{Q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{Q_1^2}{2} \cdot \left(\frac{d_2}{\varepsilon_0 \cdot \ell^2} - \frac{d_1}{\varepsilon_0 \cdot \ell^2}\right) = \frac{Q_1^2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell^2} \cdot (d_2 - d_1)$$

$$\Delta W_{el} = \frac{(1{,}8 \cdot 10^{-8}\ C)^2}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm} \cdot (0{,}32\,m)^2} \cdot \left(3{,}5 \cdot 10^{-3}\ m - 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ m\right) = 2{,}7 \cdot 10^{-7}\ J$$

Die Zunahme des Energieinhalts des elektrischen Feldes entspricht der mechanischen Arbeit, die beim Auseinanderziehen der Platten gegen die Anziehungskräfte der ungleichnamig geladenen Platten verrichtet wird.

2.3.1 Werden die beiden Platten parallel geschalten, so bleibt die Gesamtladung erhalten. Also gilt:

$$Q_1 = Q^*_{Ges} = C^*_{Ges} \cdot U^* = \left(C_1 + C_p\right) \cdot U^* \quad \Rightarrow \quad U^* = \frac{Q_1}{C_1 + C_p}$$

$$U^* = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\text{V}}{4{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{F} + 7{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{F}} = 15\,\text{V}$$

2.3.2 Nach dem Trennen tragen die beiden Kondensatoren die Ladungen

$$Q^*_1 = C_1 \cdot U^* \quad \text{und} \quad Q^*_2 = C_p \cdot U^*$$

Wird nun die positive Platte des einen Kondensators mit der negativen Platte des anderen Kondensators verbunden, so findet ein teilweiser Ladungsaustausch statt. Für die Gesamtladung Q^{**} gilt dann:

$$Q^{**} = Q^*_2 - Q^*_1$$

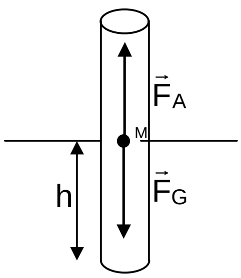
Für die Spannung U^{**} zwischen den Platten folgt:

$$U^{**} = \frac{Q^{**}}{C_{Ges}} = \frac{Q^*_2 - Q^*_1}{C_{Ges}} = \frac{C_p \cdot U^* - C_1 \cdot U^*}{C_p + C_1} = \frac{C_p - C_1}{C_p + C_1} \cdot U^*$$

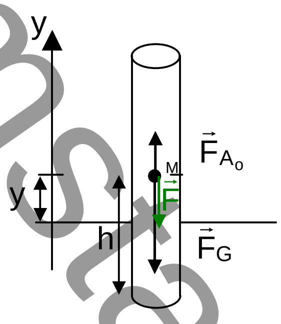
$$U^{**} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{F} - 4{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{F}}{7{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{F} + 4{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{F}} \cdot 15\,\text{V} = 3{,}75\,\text{V} \approx 3{,}8\,\text{V}$$

3.1

Gleichgewichtslage



Auslenkung nach oben



In der Gleichgewichtslage wird die auf das Reagenzglas wirkende Gewichtskraft durch die Auftriebskraft kompensiert. Es gilt:

$$F_G = F_A$$
$$m \cdot g = \rho \cdot g \cdot V$$
$$m \cdot g = \rho \cdot g \cdot A \cdot h \qquad (4)$$

Wird das Reagenzglas nach oben ausgelenkt, dann gilt für die Kraft F:

$$F = F_{A_o} - F_G = \rho \cdot g \cdot A \cdot \left(h - y\right) - m \cdot g = \underbrace{\rho \cdot g \cdot A \cdot h}_{m \cdot g} - \rho \cdot g \cdot A \cdot y - m \cdot g = -\rho \cdot g \cdot A \cdot y$$

Somit gilt: $F = -\underbrace{\rho \cdot g \cdot A}_{D} \cdot y = -D \cdot y$ mit $D = \rho \cdot g \cdot A$

Also gilt das lineare Kraftgesetz, das Reagenzglas schwingt harmonisch.

Bemerkung: Da die Auftriebskraft um das aus dem Wasser angehobene Volumenanteil verringert wird, gilt. $F_{A_o} = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h - y)$

Für die Periodendauer der harmonischen Schwingung folgt somit

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho \cdot A \cdot g}}$$

3.2.1 Für die Elongation gilt:

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \rho_0) = A \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} \cdot t + \rho_0\right) = 3{,}0\,\text{cm} \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$s(t) = 3{,}0\,\text{cm} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot t\right)$$

3.2.2 $s(t_1) = 3{,}0\,\text{cm} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot t_1\right) = 1{,}8\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot t_1\right) = 0{,}6$

$$\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot t_1 = \arccos(0{,}6) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \tfrac{0{,}80\,\text{s}}{2\pi} \cdot \arccos(0{,}6) = 0{,}12\,\text{s}$$

$$t_2 = T - t_1 = 0{,}80\,\text{s} - 0{,}12\,\text{s} = 0{,}68\,\text{s}$$

3.2.3 $s(t) = 3{,}0\,\text{cm} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot t\right)$

$$v(t) = \dot{s}(t) = -3{,}0\,\text{cm} \cdot \tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot t\right) = -7{,}5 \cdot \pi\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot t\right)$$

$$v(t^*) = v(0{,}25\,\text{s}) = -7{,}5 \cdot \pi\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}} \cdot 0{,}25\,\text{s}\right) = -22\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\left|v(t^*)\right| = 22\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Das Reagenzglas bewegt sich zum Zeitpunkt $t^* = 0{,}25\,\text{s}$ mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $0{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach unten.