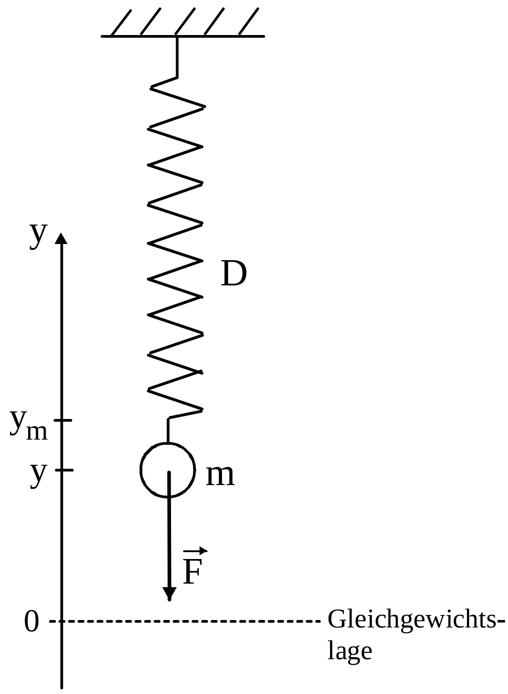
BE		
	1.0	Ein Körper der Masse m hängt an einer Schraubenfeder mit der Federkonstanten D. Die Masse der Feder ist gegenüber der Masse des Pendelkörpers vernachlässigbar klein. Wird der Pendelkörper ausgelenkt und losgelassen, so schwingt er längs einer vertikalen Achse auf und ab. Reibungsverluste sollen unberücksichtigt bleiben.



	1.1.0	Für das oben beschriebene Federpendel gilt ein lineares Kraftgesetz: $F = -D \cdot y$. Dabei ist F die y-Koordinate der auf den Pendelkörper wirkenden Rückstellkraft $\vec{F}$ und y die Elongation des Pendelkörpers aus der Gleichgewichtslage.
5	1.1.1	Leiten Sie aus dem linearen Kraftgesetz eine Formel her, mit der sich die Periodendauer T der Schwingung aus den unter 1.0 angegebenen Größen berechnen lässt.

$$F_a = F_R$$
$$m \cdot a(t) = -D \cdot y(t)$$
$$m \cdot \ddot{y}(t) = -D \cdot y(t)$$
$$m \cdot \left(-\omega^2 \cdot y(t)\right) = -D \cdot y(t)$$
$$-m \cdot \omega^2 \cdot y(t) = -D \cdot y(t)$$
$$D \cdot y(t) - m \cdot \omega^2 \cdot y(t) = 0$$
$$\left(D - m \cdot \omega^2\right) \cdot y(t) = 0$$

$$y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \rho_0)$$
$$\dot{y}(t) = y_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \rho_0)$$
$$\ddot{y}(t) = -y_m \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \rho_0) = -\omega^2 \cdot y(t)$$

Da $y(t) \neq 0$ (für die meisten t), muss gelten:

$$D - m \cdot \omega^2 = 0$$
$$D = m \cdot \omega^2$$
$$D = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$
$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{D}$$
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

5 1.1.2 Weisen Sie durch allgemeine Rechnung nach, dass die mechanische Gesamtenergie des Federpendels während einer Schwingung konstant bleibt.

$$E_{Ges}(t) = E_{pot}(t) + E_{kin}(t)$$

$$E_{Ges}(t) = \tfrac{1}{2}D\big(y(t)\big)^2 + \tfrac{1}{2}m\big(v(t)\big)^2 =$$

$$E_{Ges}(t) = \tfrac{1}{2}D\cdot y_m^2 \sin^2(\omega t + \rho_0) + \tfrac{1}{2}m\cdot y_m^2\cdot\omega^2\cos^2(\omega t + \rho_0) \qquad \text{mit } D = m\omega^2$$

$$E_{Ges}(t) = \tfrac{1}{2}D\cdot y_m^2 \sin^2(\omega t + \rho_0) + \tfrac{1}{2}D\cdot y_m^2\cdot\cos^2(\omega t + \rho_0)$$

$$E_{Ges}(t) = \tfrac{1}{2}D\cdot y_m^2\cdot\underbrace{\big(\sin^2(\omega t + \rho_0) + \cos^2(\omega t + \rho_0)\big)}_{1}$$

$$E_{Ges}(t) = \tfrac{1}{2}D\cdot y_m^2 = \text{konst.}$$

1.2.0 Die Masse des Pendelkörpers beträgt $m = 195\,g$, die Federkonstante $D = 12{,}0\,\frac{N}{m}$.
Der Pendelkörper wird um $y_m = 6{,}0\,cm$ aus der Gleichgewichtslage angehoben und zum Zeitpunkt $t_o = 0\,s$ aus der Ruhe heraus losgelassen.

4 1.2.1 Berechnen Sie die Periodendauer T und geben Sie eine Gleichung für die Abhängigkeit der Elongation y von der Zeit t mit eingesetzten Daten an.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}195\,kg}{12{,}0\,\frac{N}{m}}} = 0{,}801\,s$$

$$y(t) = A\cdot\sin(\omega t + \rho_0) = y_m\cdot\sin\left(\tfrac{2\pi}{T}t + \rho_0\right) = 6{,}0\,cm\cdot\sin\left(\tfrac{2\pi}{0{,}801\,s}t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$y(t) = 6{,}0\,cm\cdot\sin\left(7{,}84\,\tfrac{1}{s}\cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

5 1.2.2 Berechnen Sie die Elongation und den Betrag der Geschwindigkeit des Pendelkörpers für den Zeitpunkt $t^* = 0{,}50\,s$.
Beschreiben Sie mit Worten den Bewegungszustand des Pendelkörpers für diesen Zeitpunkt.

$$y(0{,}50\,s) = 6{,}0\,cm\cdot\sin\left(7{,}84\,\tfrac{1}{s}\cdot 0{,}50\,s + \tfrac{\pi}{2}\right) \approx -4{,}3\,cm$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = 6{,}0\,cm\cdot 7{,}84\,\tfrac{1}{s}\cdot\cos\left(7{,}84\,\tfrac{1}{s}\cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right) = 47\,\tfrac{cm}{s}\cdot\cos\left(7{,}84\,\tfrac{1}{s}\cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$v(0{,}50\,s) = \dot{y}(t) = 47\,\tfrac{cm}{s}\cdot\cos\left(7{,}84\,\tfrac{1}{s}\cdot 0{,}50\,s + \tfrac{\pi}{2}\right) = 33\,\tfrac{cm}{s} \;\Rightarrow\; \left|v(0{,}50\,s)\right| = 33\,\tfrac{cm}{s}$$

Der Pendelkörper befindet sich $4{,}3\,cm$ unterhalb der Ruhelage und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $33\,\frac{cm}{s}$ nach oben.

4 1.2.3 Berechnen Sie die kinetische Energie des Pendelkörpers für diejenigen Zeitpunkte, zu denen die Elongation den Wert $y_1 = \frac{y_m}{2}$ annimmt.

$$
\begin{aligned}
y(t_{TR}) &= \tfrac{1}{2} y_m \\
6{,}0\,\text{cm} \cdot \sin\left(7{,}84\tfrac{1}{s} \cdot t_{TR} + \tfrac{\pi}{2}\right) &= 3{,}0\,\text{cm} \\
\sin\left(7{,}84\tfrac{1}{s} \cdot t_{TR} + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} \\
t_{TR} &= -0{,}134\,\text{s} \\
t_1 &= 0 - (-0{,}134\,\text{s}) = 0{,}134\,\text{s}
\end{aligned}
$$

$$v_1 = v(0{,}134\,\text{s})$$

$$v_1 = 47\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(7{,}84\tfrac{1}{s} \cdot 0{,}134\,\text{s} + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$v_1 = -40{,}8\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} = -0{,}408\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_{kin}(t_1) = \tfrac{1}{2} m v_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}195\,\text{kg} \cdot \left(-0{,}408\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 16\,\text{mJ}$$

ODER aus dem Energiesatz:

$$E_{Ges} = E_{kin} + E_{pot} \quad \Rightarrow \quad E_{kin} = E_{Ges} - E_{pot} = \tfrac{1}{2} D y_m^2 - \tfrac{1}{2} D\left(\tfrac{y_m}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{8} D y_m^2$$

$$E_{kin} = \tfrac{3}{8} \cdot 12{,}0\tfrac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (0{,}060\,\text{m})^2 = 16\,\text{mJ}$$

5 1.2.4 Bestimmen Sie die Orientierung und den Betrag der Kraft $\vec{F}_F$, die die Schraubenfeder auf den Pendelkörper im oberen Umkehrpunkt ausübt.

Befindet sich die Feder samt Masse in der Ruhelage, so herrscht zwischen Federkraft und Gewichtskraft Kräftegleichgewicht. Aus diesem lässt sich die Dehnung s der Feder durch anhängen der Masse m berechnen:

$$
\begin{aligned}
F_F &= F_G \\
Ds &= mg \\
s &= \frac{mg}{D} \\
s &= \frac{0{,}195\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{N}}{\text{kg}}}{12{,}0\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}16\text{m}
\end{aligned}
$$

Das untere Ende der absolut entspannten Feder (also Feder ohne Masse m) befindet sich dann also $16\,\text{cm}$ oberhalb der Ruhelage (mit Masse m).

Wird nun die Masse m um die Strecke $y_m = 0{,}060\,\text{m}$ nach oben ausgelenkt, so verringert sich auf Grund der geringeren Dehnung der Feder die Federkraft; wohingegen die Gewichtskraft der Masse m konstant bleibt.

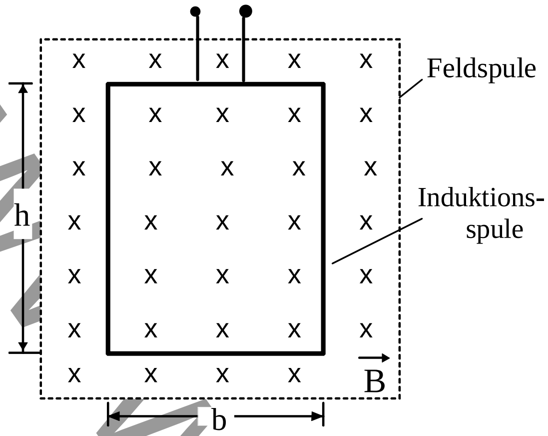
Für die Federkraft gilt nun:

$$F_F = D \cdot (s - y_m) = 12{,}0\tfrac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}16\,\text{m} - 0{,}060\,\text{m}) = 1{,}2\,\text{N}$$

Da die Position der entspannten Feder (ohne Masse m) oberhalb der Auslenkung (mit Masse m) liegt, muss die Federkraft F_F nach oben gerichtet sein.

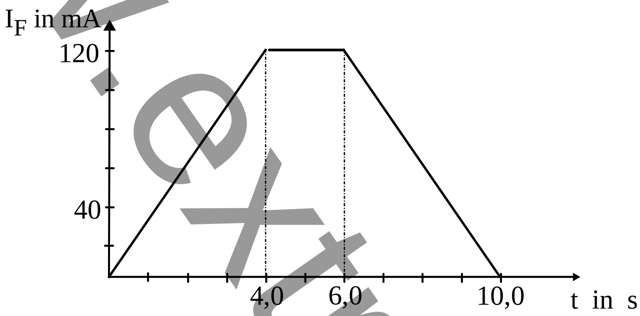
BE

2.0



Eine leere, langgestreckte Feldspule hat 16000 Windungen, die Länge 48 cm und einen quadratischen Querschnitt. Durch einen schmalen Schlitz in der Mitte der Feldspule kann eine flache Induktionsspule von oben in das homogene Magnetfeld der Feldspule eingetaucht werden. Die Induktionsspule hat 200 Windungen und einen rechteckigen Querschnitt mit den Seitenlängen $b = 5{,}0\text{ cm}$ und $h = 6{,}0\text{ cm}$. Der ohmsche Widerstand der Induktionsspule beträgt $R = 80\,\Omega$. Die Achsen der beiden Spulen sind zueinander parallel und horizontal ausgerichtet.

2.1.0



Die Induktionsspule ist vollständig in das Magnetfeld der Feldspule eingetaucht. Die Stromstärke I_F in der Feldspule hat den in der nebenstehenden Skizze dargestellten zeitlichen Verlauf.

2 2.1.1 Berechnen Sie den Betrag der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ in der Feldspule für das Zeitintervall $[4{,}0\text{ s}\,;\,6{,}0\text{ s}]$. [Ergebnis: $B = 5{,}0\text{ mT}$]

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I_{Sp} \cdot N_{Sp}}{\ell_{Sp}} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\tfrac{N}{A^2} \cdot \frac{0{,}120\,A \cdot 16000}{0{,}48\,m} = 5{,}0\,mT$$

6 2.1.2 $U_i(t)$ ist die zwischen den Enden der Induktionsspule induzierte Spannung zu einem Zeitpunkt t mit $0\text{ s} \le t \le 10{,}0\text{ s}$.
Stellen Sie in einem Diagramm den zeitlichen Verlauf der Induktionsspannung U_i für $0\text{ s} \le t \le 10{,}0\text{ s}$ graphisch dar. Maßstab: $1\text{ s} \,\hat{=}\, 1\text{ cm}$; $0{,}25\text{ mV} \,\hat{=}\, 1\text{ cm}$

Für den magnetischen Fluss gilt: $\Phi(t) = A \cdot B(t) = b \cdot h \cdot B(t) \;\Rightarrow\; \dot{\Phi}(t) = b \cdot h \cdot \dot{B}(t)$

Da sich die Stromstärke I_F linear ändert muss sich nach 2.1.1 auch das Magnetfeld B linear ändern, somit gilt:

$$\dot{B}(t) = \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Somit folgt für die induzierte Spannung in der Induktionsspule:

$$U_i(t) = -N_i \cdot \dot{\Phi}(t) = -N_i \cdot b \cdot h \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -200 \cdot 0{,}05\,m \cdot 0{,}06\,m \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -0{,}60\,m^2 \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Für den 1. Zeitbereich $\left(t \in [0\,s;\, 4{,}0\,s]\right)$ gilt:

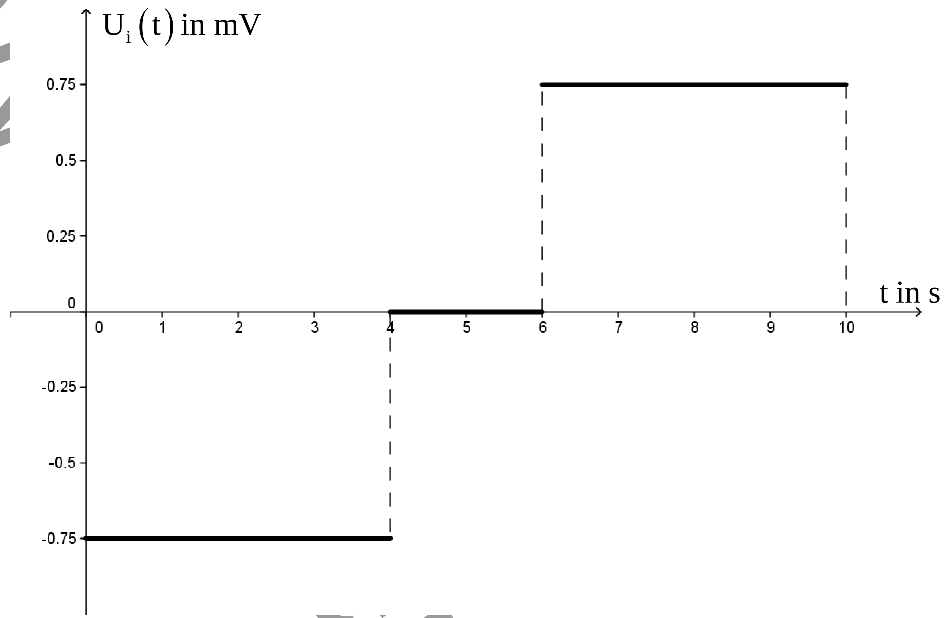
$$U_i(t) = -0{,}60\,m^2 \cdot \frac{5{,}0 \cdot 10^{-3}\,T - 0\,T}{4{,}0\,s} = -0{,}75\,mV$$

Für den 2. Zeitbereich $\left(t \in [4,0\,s; 6,0\,s]\right)$ gilt:

$$U_i(t) = -0,60\,m^2 \cdot \frac{0\,T}{2,0\,s} = 0\,mV$$

Für den 3. Zeitbereich $\left(t \in [6,0\,s; 10,0\,s]\right)$ gilt:

$$U_i(t) = -0,60\,m^2 \cdot \frac{0\,T - 5,0 \cdot 10^{-3}\,T}{4,0\,s} = 0,75\,mV$$



4 2.1.3 Die Enden der Induktionsspule werden kurzgeschlossen. Wird der Vorgang aus 2.1.0 wiederholt, so fließt in den Zeitintervallen $[0\,s\,; 4,0\,s]$ und $[6,0\,s\,; 10,0\,s]$ ein Strom durch die Induktionsspule.
Geben Sie an, welchen Umlaufsinn dieser Strom im Zeitintervall $[6,0\,s\,; 10,0\,s]$ hat. Begründen Sie Ihre Antwort.

Im Zeitintervall $[6,0\,s\,; 10,0\,s]$ nimmt die Stromstärke und somit die magnetische Flussdichte B ab. Nach der Lenz'schen Regel muss demnach in der Induktionsspule ein Feld entstehen, welches seiner Ursache entgegen wirkt. Das Feld der Induktionsspule ist somit dem äußeren Feld gleichgerichtet und zeigt somit in die Zeichenebene hinein. Dieses wird von einem Strom in der Induktionsspule erzeugt, welche im Uhrzeigersinn fließt.

2.2.0 Die Enden der Induktionsspule bleiben kurzgeschlossen. Die Stromstärke in der Feldspule beträgt $I_F = 120\,mA$. Die Induktionsspule wird mit einer konstanten Geschwindigkeit vom Betrag $v = 4,0\,\frac{cm}{s}$ nach oben aus der Feldspule gezogen. Zum Zeitpunkt t_1 treten die oberen Querleiterstücke der Induktionsspule, zum Zeitpunkt t_2 die unteren Querleiterstücke aus dem Magnetfeld der Feldspule aus.

4 2.2.1 Im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ fließt durch die Induktionsspule ein Induktionsstrom.
Berechnen Sie die Stromstärke I_i. [Ergebnis: $I_i = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ A]

Für die im Zeitintervall $\left[t_1; t_2\right]$ vom Magnetfeld durchsetzte Fläche gilt:
$A(t) = A_0 - b \cdot s = h \cdot b - b \cdot v \cdot t \;\Rightarrow\; \dot{A}(t) = -b \cdot v$
Dann gilt für den magnetischen Fluss: $\Phi(t) = A(t) \cdot B \;\Rightarrow\; \dot{\Phi}(t) = \dot{A}(t) \cdot B = -b \cdot v \cdot B$
Für den Induktionsstrom I_i folgt dann:

$$I_i = \frac{U_i}{R} = \frac{-N_i \dot{\Phi}(t)}{R} = \frac{N_i \cdot b \cdot v \cdot B}{R} = \frac{200 \cdot 0{,}050\,\mathrm{m} \cdot 0{,}040\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}}{80\,\Omega} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{A}$$

6 2.2.2 Dieser Induktionsstrom hat zur Folge, dass auf die Induktionsspule außer der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ noch eine weitere vertikal nach unten gerichtete Kraft $\vec{F}_m$ wirkt. Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Arbeit W, die im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ gegen die Kraft $\vec{F}_m$ verrichtet wird, genau so groß ist wie die elektrische Energie W_{el}, die in diesem Zeitintervall im Widerstand R der Induktionsspule umgesetzt wird.

Für die Kraft F_m eines stromdurchflossenen Leiters gilt: $F_m = N_i \cdot B \cdot b \cdot I_i$
Dann folgt für die Arbeit W_m: $W_m = F_m \cdot h = N_i \cdot B \cdot b \cdot I_i \cdot h$

Für die elektrische Arbeit gilt: $W_{el} = U_i \cdot I_i \cdot \Delta t$ mit $\Delta t = t_2 - t_1$

Mit $v = \frac{h}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{h}{v}$

und $U_i = N_i \cdot b \cdot v \cdot B$

folgt: $W_{el} = U_i \cdot I_i \cdot \Delta t = N_i \cdot b \cdot v \cdot B \cdot I_i \cdot \frac{h}{v} = N_i \cdot b \cdot h \cdot B \cdot I_i$

Insgesamt: $W_{el} = W_m$

50