§ 9 Bernoulli-Ketten

9.1 Bernoulli-Experimente

In vielen Fällen genügt es zur stochastischen Modellierung, Experimente zu betrachten, die nur zwei mögliche Ergebnisse haben. Ein einfaches Beispiel hierfür ist das einmalige Werfen einer Münze. Aber auch bei Experimenten mit mehr als zwei Ergebnissen (wie z. B. dem Werfen eines Würfels) ist oftmals nur die Frage interessant, ob ein bestimmtes Ergebnis (z. B. die Augenzahl 6) eintritt oder nicht (wenn unerheblich ist, welche Augenzahl zwischen 1 und 5 erzielt wurde). In solchen Fällen spricht man dann einfach von den Ergebnissen Treffer und Niete oder noch einfacher von der Ergebnismenge $\Omega = \{T;N\}$, wobei natürlich klar sein muss, was mit Treffer (meist T) oder Niete (meist N) gemeint sein soll.

<u>Definition</u>:
Ein Zufallsexperiment heißt Bernoulli-Experiment, wenn sich sein Ergebnisraum Ω in der Form $\Omega = \{T;N\}$ darstellen lässt. Dabei gilt:

$$N = \overline{T}$$
$$P(T) = p$$
$$P(N) = q$$
$$p + q = 1 \ \left(\text{oder}: q = 1 - p\right).$$

Bspe.:

Warenkontrolle:	brauchbar – unbrauchbar
Lotterie:	Gewinn – kein Gewinn
Geburt:	Junge – Mädchen
Schießen:	Treffer – kein Treffer
Prüfung:	Bestanden – Durchgefallen
$\vdots$	
Allg.:	Treffer – Niete

Die in Basel ansässige Familie Bernoulli hat enorme Beiträge zur Entwicklung der Mathematik geleistet. Acht Bernoullis aus drei Generationen, die zwischen 1650 und 1800 lebten, waren ausgezeichnete Mathematiker.
Sie sind ein ungewöhnliches Beispiel für Hochbegabung auf mathematischem Gebiet. Fünf von ihnen waren wesentlich an der Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung beteiligt, insbesondere Jakob Bernoulli (1655-1705), der gegen den Willen seines Vaters Mathematik studierte. Mit seinen Beiträgen entwickelte sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer respektablen Wissenschaft mit reichen Anwendungsmöglichkeiten.

9.2 Bernoulli-Ketten

Bei vielen Problemen in der Praxis treten Serien von identischen Bernoulli-Experimenten auf. Man fasst dies dann als ein mehrstufiges Zufallsexperiment auf. So kann z. B. das Herausgreifen von 10 Produkten aus einer Produktionsserie (bei einer Qualitätskontrolle) als Folge von 10 Bernoulli-Experimenten aufgefasst werden. Wichtig hierbei ist, dass die einzelnen Bernoulli-Experimente als unabhängig voneinander betrachtet werden können. Das Kennzeichnende dieser Serien ist dann, dass die Trefferwahrscheinlichkeit von Experiment zu Experiment gleich bleibt und dass sich die Experimente gegenseitig nicht beeinflussen.

Definition:
Das n-stufige Zufallsexperiment aus n gleichen Bernoulli-Experimenten mit der Trefferwahrscheinlichkeit p heißt Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter p. Bezeichnet $\Omega = \{T; N\}$ die Ergebnismenge des Bernoulli-Experimentes, so ist $\Omega = \Omega^n = \{T; N\}^n$ die Ergebnismenge der Bernoulli-Kette.

Bemerkung:
Die Elemente von $\Omega = \Omega^n$ sind also n-Tupel, deren Stellen jeweils mit N oder T besetzt sind.

Beispiel: Ein bestimmter Schüler einer bestimmten Klasse, den wir namentlich mal nicht nennen wollen ist an einem Schultag mit der Wahrscheinlichkeit $p = P(\text{"krank"}) = 0{,}1$ krank und mit der Wahrscheinlichkeit $q = P(\text{"gesund"}) = 0{,}9$ gesund. Wir betrachten nun den Unterrichtsbesuch dieses Schülers über eine Woche hinweg. Dann gilt für den Ergebnisraum:

$$\Omega = \{ggggg; ggggk; gggkg; ....; kkkkk\}$$

Dann folgt für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

$$P(\text{"immer gesund"}) = 0{,}9^5$$

$$P(\text{"immer krank"}) = 0{,}1^5$$

$$P(\text{"am 1. Tag krank"}) = 0{,}1 \cdot 0{,}9^4$$

$$P(\text{"an genau 1 Tag krank"}) = 5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^4$$

$$P(\text{"am 1. und 2. Tag krank"}) = 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3$$

$$P(\text{"an genau 2 Tagen krank"}) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3$$

$$P(\text{"an genau 3 Tagen krank"}) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2$$

Definition:
In einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p und der Nietenwahrscheinlichkeit q gibt $P_p^n(X = k) = B(n; p; k)$ die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer an. Es gilt:

$$P_p^n(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \left(k \in \{1; 2; ...; n\}\right)$$

Diese Formel nennt man Bernoulli Formel.

Aufgaben:

1. Ein Würfel wird 10-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, genau 5-mal eine 6 zu werfen.

2. Eine Urne enthält 10 schwarze und 5 weiße Kugeln, von denen genau 3 Stück mit Zurücklegen gezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, genau 2 weiße Kugeln zu ziehen?

3. Eine nicht rechtzeitig erkannte Krankheit ist lebensbedrohend und kann nur durch eine Operation geheilt werden, die zu 90% erfolgreich verläuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 4 Patienten
   a) genau drei Patienten gesund werden?
   b) alle gesund werden?
   c) höchstens zwei Patienten gesund werden?
   d) mehr als die Hälfte gesund wird?

Umformungshilfen:

$P_p^n(X = k)$	"genau k ..."
$P_p^n(X > k) = 1 - P_p^n(X \le k)$	"mehr als k ..."
$P_p^n(X < k) = P_p^n(X \le k-1)$	"weniger als k ..."
$P_p^n(X \ge k) = 1 - P_p^n(X \le k-1)$	"mindestens k ..."
$P_p^n(X \le k)$	"höchstens k ..."

Schreibweise:

$$P_p^n(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} P_p^n(X = i) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$$

4. Eine Münze wird 6-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,
   a) wenigstens
   b) höchstens
   5-mal Wappen zu werfen?

5. Zwei Tennisspieler A und B stehen sich bei einem Turnier in 5 Spielen gegenüber. Derjenige, der mehr als die Hälfte der Spiele gewinnt, kommt eine Runde weiter. A ist der bessere Spieler und gewinnt ein Spiel mit 60% Wahrscheinlichkeit. Welche Siegeschancen hat B?

6. Ein Fabrikant garantiert die Güte seiner Artikel zu 90%. Man überprüft (mit Zurücklegen) 5 Stück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als 2 unbrauchbare Artikel zu erhalten?

7. a) Aus 10 Losen, unter denen sich 4 Treffer und 6 Nieten befinden, werden nacheinander (mit Zurücklegen) 4 Lose gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man dabei mindestens 3 Treffer?
   b) Kann das soeben beschriebene Experiment auch dann noch als Bernoulli-Kette aufgefasst werden, wenn die Ziehungen ohne Zurücklegen erfolgen? (Begründung!)

8. Ein Versandhaus verschickt Schokoladentafeln, pro Karton 12 Stück. Man rechnet aus Erfahrung damit, dass 10% der Tafeln beim Transport beschädigt werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man in einem Karton genau 3 beschädigte Stücke?

9. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs auftritt.
   b) bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs auftritt.

   Diese Aufgabe wird als das Problem von de Méré bezeichnet. Chevalier de Méré (1606 bis1684), ein professioneller Spieler am Hof Ludwigs des XIV., war der irrigen Meinung, dass die beiden genannten Wahrscheinlichkeiten gleich seien. Wegen schlechter Erfahrungen wandte er sich an den Mathematiker Blaise Pascal (1623 bis 1662), der 1654 in einem Briefwechsel mit Pierre de Fermat (1601 bis 1665) das Problem löste und damit die Grundlagen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung legt.

10. Ein Früchtegroßhändler bietet leicht verderbliche Obst an. Er muss mit Reklamationen rechnen, wenn die Ware mehr als 10% verdorbene Früchte enthält. Um dies zu überprüfen, untersucht ein Stammkunde stets 10 zufällig ausgewählte Früchte und reklamiert, wenn mehr als 1 Stück verdorben ist.
    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 10% Ausschuss das Obst beanstandet wird?
    b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stichprobe genau 2 schlechte Früchte enthält, so dass die Ware beanstandet wird?
    c) Aufgrund dieser Ergebnisse hält der Großhändler das Vorgehen des Stammkunden für ungerecht. Er schlägt vor, 20 Früchte zu überprüfen und die Ware zu beanstanden, wenn mehr als 2 Stück verdorben sind. Ist dieses Vorschlag günstiger?

11. Eine Maschine erzeugt billige Nägel, von denen 20% fehlerhaft sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 20 zufällig überprüften Nägeln
    a) genau 5 Nägel unbrauchbar?
    b) höchstens 5 Nägel unbrauchbar?
    c) Wie viele Nägel muss man wenigstens überprüfen, damit man mit mindestens 50%-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens einen unbrauchbaren Nagel findet?

12. Bestimme mit Hilfe der Tabellen
    a) $B(50; 0{,}6; 28)$
    b) $\sum_{i=0}^{13} B(30; 0{,}3; i)$
    c) $\sum_{i=4}^{12} B(20; \tfrac{1}{3}; i)$

14. Der Fachoberschüler Ferdinand Faul hat eine Fehlquote von 20%, d.h. er versäumt gleichmäßig in allen Fächern 20% des Unterrichts (=vorzeitige Einführung der 4-Tage-Woche). Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt er in einem Halbjahr mit insgesamt 100 Mathematikstunden hiervon
    a) genau 20 Stunden,
    b) mindestens 20 Stunden,

c) höchstens 10 Stunden,
d) zwischen 10 und 30 Stunden?

15. Bei einer Prüfung mit 50 Fragen sind zu jeder Frage vier Antworten vorgegeben, von denen nur jeweils eine richtig ist. Der Student Knut Sorglos hat keine Zeit gefunden, um sich auf die Prüfung vorzubereiten, und kreuzt daher wahllos an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er
   a) genau 12 Fragen richtig,
   b) höchstens 12 Fragen richtig,
   c) mehr als 12 Fragen richtig,
   d) mehr als die Hälfte aller Fragen richtig und besteht somit die Prüfung?

16. Eine Urne enthält dreimal so viele weiße Kugeln wie schwarze Kugeln. Es werden nacheinander acht Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln dreimal so viele weiße Kugeln sind wie schwarze Kugeln .

17. Aus der Geburtenstatistik erhält man derzeit eine Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungens von 0,49. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den vier Kindern einer Familie zwei Mädchen sind?

18. Man rechnet mit 5% Schwarzfahrern auf einer bestimmten Buslinie. Wie viele Fahrgäste muss der Kontrolleur mindestens nach ihrem Fahrschein fragen, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einen Schwarzfahrer ertappt hat?

19. Ein Gerät besteht aus 5 Bauteilen, die unabhängig voneinander mit der gleichen Funktionswahrscheinlichkeit arbeiten. Fällt ein Bauteil aus, so arbeitet das Gerät nicht mehr. Welche Funktionswahrscheinlichkeit müssen die Bauteile haben, wenn das Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% funktionieren soll?

20. Ein Großhändler versorgt 10 Geschäfte, von denen jedes Bestellungen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,4$ aufgibt.
   a) Wie viel Bestellungen laufen mit größter Wahrscheinlichkeit ein?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der Bestellungen um höchstens 1 vom wahrscheinlichsten Wert ab?

21. Nach einem Maschinenschaden sind erfahrungsgemäß 70% der Teile Ausschuss. Es werden 50 Teile beliebig entnommen. Mit wie vielen Teilen muss man mindestens rechnen, wenn man ein Risiko von höchstens 10% eingehen möchte?

22. Ein Kfz-Händler weiß aus jahrelanger Erfahrung, dass von den in Zahlung genommenen Wagen 15% geringe, 60% mittelschwere und 25% sehr schwere Schäden aufweisen. Er will die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass von den nächsten 20 Wagen, die er in Zahlung nehmen wird bei
   a) genau 10 sehr schwere Schäden vorliegen.
   b) höchstens 8 mittelschwere Schäden vorliegen.
   c) mindestens 12 geringe Schäden vorliegen.

Stochastik SI 97

2.0 Die Samenkörner werden in kleine Blumentöpfchen mit Erde gelegt. Untersuchungen haben gezeigt, dass bei Samenkörnern einer bestimmten Qualität trotz vorschriftsmäßiger Pflege nur sieben von zehn ausgesäten Körnern auch wirklich auskeimen. Daher wird jedes Töpfchen mit genau zwei Samenkörnern bestückt. Betrachtet wird das Ereignis
T: „In einem mit zwei Samenkörnern bestückten Töpfchen keimt mindestens eines der beiden Körner".

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten des Ereignisses T. (Ergebnis: p=0,91)

2.2.0 Nun werden 20 Töpfchen mit je zwei Samenkörnern bestückt und nach Ablauf der maximalen Keimzeit von sieben Tagen überprüft. Ermitteln Sie auf jeweils drei Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis T bei den 20 Töpfchen

2.2.1 genau 20 mal eintritt;

2.2.2 höchstens zweimal nicht eintritt.

Stochastik SI 2000

3.0 Eine Keksfabrik stellt Vanillekipferl her. Dieses leicht zerbrechliche Gebäck wird automatisch in Schachteln zu je 20 Stück verpackt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei ein zunächst unbeschädigtes Kipferl zum „Bruchkipferl" wird, beträgt erfahrungsgemäß 0,02. Dieser Wert wird von der Firma in Kauf genommen.

3.1 Berechnen Sie (auf drei Nachkommastellen gerundet) die Wahrscheinlichkeit P dafür, in einer frisch verpackten Schachtel kein Bruchkipferl zu finden und anschließend die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
E_5: „Von fünf solchen Schachteln enthalten mindestens zwei ausschließlich unbeschädigte Kipferl"

Stochastik SII 2000

4.0 Eine Firma liefert an einen Händler Porzellanbecher in Packungen zu je 20 Stück aus. Jede Packung kann eine unbekannte Anzahl von schadhaften Bechern enthalten. Der Händler prüft eine Lieferung, indem er aus jeder Packung zufällig zwei Becher <u>ohne</u> Zurücklegen entnimmt. Nur wenn beide Becher in Ordnung sind, nimmt er die betreffende Packung an.

4.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Händler eine Packung annehmen wird, wenn sie eine, drei bzw. zehn schadhafte Becher enthält.

4.2 Eine Lieferung besteht aus acht Packungen, von denen jede Packung genau einen schadhaften Becher enthält. Berechnen Sie jeweils, mit welcher Wahrscheinlichkeit
1) alle Packungen
2) genau die Hälfte der Packungen
3) mehr als die Hälfte der Packungen
angenommen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für die Annahme einer Packung 0,9 beträgt.

Stochastik SI 2001

Bei umfangreichen Verkehrszählungen in einer Großstadt wurden Zusammenhänge zwischen der Anzahl der vorbeifahrenden PKWs bzw. LKWs festgestellt. Im

Folgenden werden nur diese beiden Fahrzeugarten betrachtet. Die dabei ermittelten relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.
Nach dem Ergebnis der Zählungen handelt es sich bei 20 % der betrachteten Fahrzeuge um LKWs.

4.0 Es wird eine Reihe von zehn hintereinander fahrenden Fahrzeugen betrachtet.

4.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_1: "Nur das fünfte Fahrzeug ist ein LKW."
E_2: "Genau die Hälfte der Fahrzeuge sind LKWs."
E_3: "Die Fahrzeuge bilden eine bunte Reihe, d.h. abwechselnde Reihenfolge in Bezug auf die Fahrzeugart."

4.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines der zehn Fahrzeuge ein LKW ist.

4.3 Berechnen Sie, welchen Wert die Wahrscheinlichkeit $p = P(L)$ haben müsste, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 mindestens eines der zehn Fahrzeuge ein LKW wäre.

Stochastik SI 2005

2.0 An der Kasse des Erlebnisparks werden Bargeld und Kreditkarten akzeptiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher mit Bargeld bezahlt, beträgt p. Es werden im Folgenden 12 zufällig ausgewählte Personen betrachtet.

2.1 Berechnen Sie für den Fall $p = 0{,}8$, die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 12 Personen mindestens 11 mit Bargeld bezahlen.

2.2 Ermitteln Sie, wie groß p mindestens sein müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 0,5 alle 12 Personen mit Bargeld bezahlen.

Stochastik SI 2006

1. Am 22.04.2005 wurden 812000 Tickets zur FIFA WM 2006 verlost. 900000 Menschen hatten zuvor insgesamt $8{,}1$ Millionen Karten bestellt. Jede Kartenbestellung hat die gleiche Chance.
Ein Fußballfan hat 16 Karten bestellt. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er
   a) keine Karte
   b) mindestens eine Karte
   c) genau zwei Karten
   d) jeweils genau eine Karte für das Eröffnungsspiel und das Finale erhält.

T 13 1998 B I

In einer Fruchtgroßhandlesfirma werden für eine Supermarktkette Früchte abgepackt. Dabei mischt man eine große Anzahl von Früchten des Importeurs A und die etwas kleineren Früchte derselben Sorte des Importeurs B im Verhältnis 60:40 und füllt vorerst je 20 Früchte in ein Netz.
Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1: „In einem Netz befinden sich genau 12 Früchte des Importeurs A."
E_2: „In einem Netz befinden sich mindestens 7 Früchte des Importeurs B."
E_3: „In einem Netz sind weniger Früchte von Importeurs A als von B."
E_4: „Unter 4 beliebig herausgegriffenen Netzen sind in höchstens drei Netzen mindestens 7 Früchte des Importeurs B."

2. Beim Abfüllen der Früchte reißt ein Netz mit der Wahrscheinlichkeit 0,02. Berechnen Sie, nach wie vielen Abfüllvorgängen die Wahrscheinlichkeit für das Reißen mindestens eines Netzes größer als 95% ist.

T 13 2000 B I

Ein Händler kauft eine große Anzahl von Energiesparlampen. Der Produzent teilt mit, das die Wahrscheinlichkeit für eine defekte Lampe 3% beträgt. Die Lampen werden nacheinander mit Zurücklegen geprüft.

1. Der Händler prüft 5 Lampen. Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit für folgenden Ereignisse:
   A: „Genau eine geprüfte Lampe ist defekt.“
   B: „Höchstens eine geprüfte Lampe ist defekt.“
   C: „Nur die erste geprüfte Lampe ist defekt.“
   D: „Zwei aufeinanderfolgend geprüfte Lampen sind defekt, die anderen drei funktionieren.“

   Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$.
2. Berechnen Sie, wie viele Lampen mindestens getestet werden müssen, um mit über 95% Wahrscheinlichkeit mindestens eine defekte Lampe zu finden.

3.0 Händler und Produzent haben einen Preisnachlass vereinbart, falls in einer Stichprobe von 40 zufällig ausgewählten Lampen mehr als 2 defekt sind.

3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Preisnachlass gewährt wird, obwohl die Lieferung nur 3% defekte Lampen enthält.

3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Händler keinen Nachlass erhält, obwohl 6% der Lampen dieser Lieferung defekt sind.

T 13 2004 B II

1.0 In einem Land wurde vor kurzem eine Repräsentativumfrage durchgeführt, die einen Eindruck vermitteln sollte bezüglich der Einstellung der Bevölkerung zur Chemie bzw. der chemischen Industrie.
Es ergab sich folgendes Bild:
38% der Befragten haben zur Chemie eine eher positive Einstellung, der Rest eine eher negative.
Der Anteil derjenigen Befragten, die mindestens eine mittlere Schulbildung besitzen, beträgt 75%. 70% derjenigen Befragten, die nicht mindestens mittlere Schulbildung besitzen, lehnen die Chemie ab.
(Alle in der Befragung sich ergebenden relativen Häufigkeiten werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert!)

1.1 Man fragt 8 zufällig ausgewählte Bewohner des Landes nach ihrer Einstellung zur Chemie. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) mindestens 3 davon;
b) die letzten 3 davon,
c) nur die letzten 3 davon eine eher negative Einstellung äußern.

1.2 Bestimmen Sie die Anzahl derjenigen Personen, die man mindestens befragen müsste, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9% mindestens eine mit positiver Meinung zur Chemie findet.

1.3 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person
a) mindestens mittlere Schulbildung hat und der Chemie gegenüber eher positiv eingestellt ist.
b) die mindestens mittlere Schulbildung hat, der Chemie gegenüber eher positiv eingestellt ist.

c) die der Chemie gegenüber positiv eingestellt ist, mindestens mittlere Schulbildung besitzt.