§ 8 Bedingte Wahrscheinlichkeit

8.1 Einführung und Definition

Der Zusammenhang zwischen dem Geschlecht einer beliebig ausgewählten Person und einer eventuellen Rotgrünblindheit ist in der folgenden Vierfeldertafel dargestellt.
Dabei gelten folgende Bezeichnungen:
M: Die Person ist männlich.
R: Es liegt eine Rotgrünblindheit vor.

	R	$\overline{R}$	$\sum$
M	0,0187	0,4957	0,514
$\overline{M}$	0,0021	0,4839	0,486
$\sum$	0,0208	0,9792	1,00

Überprüfen Sie zunächst, ob die beiden Ereignisse R und M stochastisch unabhängig sind.

$$P(R)\cdot P(M) = 0{,}0208\cdot 0{,}514 = 0{,}0106912 \neq 0{,}0187 = P(R\cap M)$$

Somit sind die beiden Ereignisse R und M stochastisch abhängig.

Wir wollen nun wissen, ob der Anteil der Rotgrünblinden unter den Männer größer als ihr Anteil unter den Frauen ist..
Dazu berechnet man den Anteil der rotgrünblinden Männer unter allen Männer.
Also:

$$P_M(R) = \frac{0{,}0187}{0{,}514} \approx 0{,}0364$$

und

$$P_{\overline{M}}(R) = \frac{0{,}0021}{0{,}486} \approx 0{,}0043$$

Somit sieht man, dass der Anteil der rotgrünblinden Männer unter den Männern größer ist als der Anteil der rotgrünblinden Frauen unter den Frauen.

Wir haben hier eine Wahrscheinlichkeit R unter der Bedingung M bzw. $\overline{M}$ berechnet.
Diese Überlegung nehmen wir als Grundlage für folgende

Definition:
Sind A und B Ereignisse eines Ereignisraums Ω, mit $A \neq \{\ \}$. Dann heißt

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A.

Unter welcher Bedingung gilt $P_A(B) = P(B)$?

Ist $A = \Omega$, so folgt nämlich: $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(\Omega)} = \frac{P(B)}{P(\Omega)} = P(B)$

8.2 Die Axiome von Kolmogorow

Die bedingte Wahrscheinlichkeit P_A für festes A und variables B erfüllt die Axiome von Kolmogorow und stellt daher ein Wahrscheinlichkeitsmaß dar.
Mit $P(A) > 0$ gilt nämlich:

1. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$ (Nichtnegativität)
2. $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$ (Normierung)
3. Ist $B \cap C = \{\ \}$, so gilt:

$$\begin{aligned} P_A(B \cup C) &= \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \\ &= P_A(B) + P_A(C) \end{aligned}$$

(Additivität)

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$P_A(A) = 1$ (A ist das sichere Ereignis!)

$P_A(\overline{A}) = 0$ ($\overline{A}$ ist das unmögliche Ereignis!)

$P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$

$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$

Beweis:

$$P_A(A)=\frac{P(A\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

$$P_A(\overline{A})=\frac{P(A\cap\overline{A})}{P(A)}=\frac{P(\{\ \})}{P(A)}=0$$

$$\begin{aligned}P_A(B)+P_A(\overline{B})&=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}+\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}\\&=\frac{P\left((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\right)}{P(A)}\\&=\frac{P\left(A\cap(B\cup\overline{B})\right)}{P(A)}\\&=\frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)}\\&=\frac{P(A)}{P(A)}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_A(B\cup C)&=\frac{P\left(A\cap(B\cup C)\right)}{P(A)}\\&=\frac{P\left((A\cap B)\cup(A\cap C)\right)}{P(A)}\\&=\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)-P\left((A\cap B)\cap(A\cap C)\right)}{P(A)}=\\&=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}+\frac{P(A\cap C)}{P(A)}-\frac{P(A\cap B\cap A\cap C)}{P(A)}\\&=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}+\frac{P(A\cap C)}{P(A)}-\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A)}\\&=P_A(B)+P_A(C)-P_A(B\cap C)\end{aligned}$$

8.3 Die Multiplikationsregel

Macht man die Gleichung

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

bruchfrei, so erhält man:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

Die letztere Formel findet in der Praxis häufiger Anwendung!

Beispiel: Aus einem Kartenspiel werden nacheinander zwei Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Buben gezogen werden?

Wir betrachten dazu die beiden Ereignisse:
B_1: „Beim ersten Zug wird ein Bube gezogen"
B_2: „Beim zweiten Zug wird ein Bube gezogen"
Nun sucht man die Wahrscheinlichkeit $P(B_1 \cap B_2)$. Es gilt:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2)$$

Klar ist: $P(B_1) = \frac{4}{32}$

$P_{B_1}(B_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweiten Zug ein Bube gezogen wird unter der Bedingung, dass auch beim ersten Zug ein Bube gezogen wurde.
Also: $P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{31}$
Somit folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \approx 1{,}2\%$$

(Das hätte man auch mit Hilfe der Kombinatorik erhalten!)

Durch sukzessives Hinzufügen eines weiteren Ereignisses erhält man aus der Multiplikationsregel für zwei Ereignisse auch eine entsprechende Multiplikationsregel für drei Ereignisse A, B und C. Es gilt:

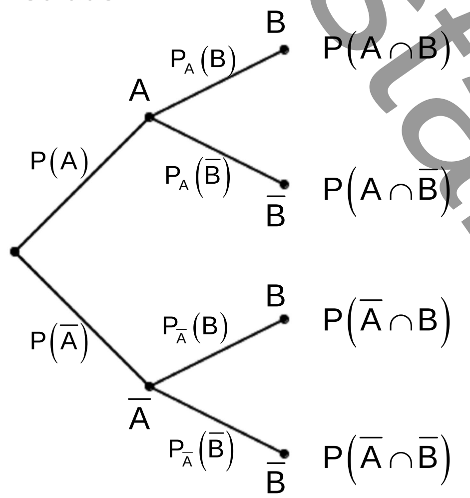
$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P_{A \cap B}(C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

für $P(A) > 0$ und $P(A \cap B) > 0$.

Berechnen Sie nun wie groß die Wahrscheinlichkeit ist drei Buben zu ziehen.

8.3 Die bedingte Wahrscheinlichkeit am Baumdiagramm

Die bedingte Wahrscheinlichkeit kann man auch an einem Baumdiagramm darstellen. Das sieht dann so aus:



Aufgaben:

1.) Bei einer Röntgenreihenuntersuchung bedeut
T: „Die untersuchte Person ist an Tbc erkrankt",

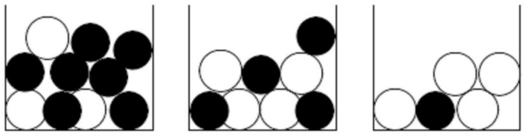
$\overline{T}$: „Die untersuchte Person ist nicht an Tbc erkrankt“,
V: „Das Röntgenbild ergibt einen Tbc-Verdacht“,
$\overline{V}$: „Das Röntgenbild ergibt keinen Tbc-Verdacht“.
Interpretieren Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P_T(V)$, $P_T(\overline{V})$, $P_V(\overline{T})$, $P_{\overline{V}}(T)$

2.) Bei einer Untersuchung seien folgende Ereignisse gegeben:
D: „Patient ist an Diabetes erkrankt“,
M: „Patient ist männlich“,
W: „Patient ist weiblich“.
Benützen Sie die folgende Tabelle, um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen:

	M	W	
D	0,04	0,01	0,05
$\overline{D}$	0,56	0,39	0,95
	0,60	0,40	1

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient an Diabetes erkrankt ist.
b) Die Wahrscheinlichkeit für Diabetes unter männlichen Patienten.
c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient männlich ist, wenn Diabetes vorliegt.
d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient weiblich ist, wenn Diabetes vorliegt.
e) Wie erkennt man, dass in diesem Beispiel die Diabeteserkrankung vom Geschlecht des Patienten abhängig ist?

3.) Eine der Urnen U_1, U_2, U_3 wird ausgelost und aus der gewählten Urne wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen? Angenommen, eine gezogene Kugel ist schwarz. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus U_1?



U_1 U_2 U_3

4.) Ein Angler pflegt Sonntagsmorgens einen von drei Seen A, B und C zufällig auszuwählen, um eine Stunde zu angeln. Die Wahrscheinlichkeit, dass er etwas fängt, beträgt bei A 2/3, bei B 3/4 und bei C 4/5. In der Nähe des Sees B ist eine Gastwirtschaft mit einer attraktiven Wirtin. Darum sieht es die Ehefrau des Anglers nicht gern, wenn er in diesem See angelt. Eines Sonntagsmorgen ruft der Angler seine Frau an und berichtet, dass er etwas gefangen hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in B geangelt hat?

5.) 50% aller Teilnehmer einer Konferenz sind Amerikaner. Jeder 8. Amerikaner und jeder 80. Nichtamerikaner trinkt zum Frühstück Tomatensaft. Sie beobachten einen Teilnehmer, der zum Frühstück Tomatensaft trinkt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Amerikaner handelt?

6.) Max hat drei Stammkneipen. Einmal pro Woche geht er in den "Kühlen Grund", zweimal in die "Sorgenpause" und dreimal in den "Schluckspecht". Die Wahrscheinlichkeit, dass er dort seinen Freund Moritz trifft, beträgt im "Kühlen Grund" 0,5, in der "Sorgenpause" 1/6 und im "Schluckspecht" 1/3.
Max kommt abends nach Hause und erzählt seiner Frau, er habe eben in der Kneipe Moritz getroffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war er in der "Sorgenpause"?

7.) Eine Firma beschäftigt drei Mitarbeiter, die telefonische Anfragen von Kunden beantworten sollen. Herr Alleskönner kann 95% aller Frage zur Zufriedenheit der Kunden beantworten, Frau Besserwisser 90% und Herr Chancenlos noch gerade 70%. Berechne unter der Annahme, dass alle drei Mitarbeiter gleich viele Telefonate beantworten, die Wahrscheinlichkeiten, dass

a) ein Kunde mit der Antwort, die er erhält, nicht zufrieden ist,
b) ein unzufriedener Kunde an Frau Besserwisser geraten ist,
c) eine Antwort, die zur Zufriedenheit des Kunden ausfiel, von Herrn Chancenlos gegeben wurde,
d) eine Antwort, die den Kunden nicht zufrieden stellt, von Herrn Alleskönner gegeben wurde,
e) ein Kunde an Herrn Alleskönner gerät und eine zufriedenstellende Antwort bekommt,
f) ein Kunde an Herrn Chancenlos gerät und eine nicht zufriedenstellende Antwort bekommt.

a) 3/20 = 15 % b) 2/9 ≈ 22,22 % c) 14/51 ≈ 27,45 % d) 1/9 ≈ 11,11 % e) 95/300 ≈ 31,67 % f) 1/10 = 10 %

8.) Eine Urne enthält 100 Kugeln. 70 Kugeln bestehen aus dem Material Holz und 30 Kugeln sind aus Kunststoff. 25 der Holzkugeln sind mit der Farbe rot gestrichen und 45 sind grün. 10 der Kunststoffkugeln sind rot und 20 sind grün.
Jemand zieht eine Kugel und spürt mit der Hand, dass es sich um eine Kunststoffkugel handelt. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel in seiner Hand grün ist?

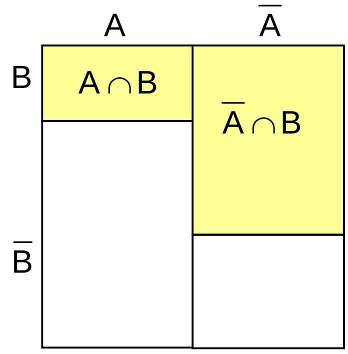
9.) In einem Quizprogramm können die Kandidaten eine von drei verschlossenen Türen auswählen, bei denen hinter einer der Hauptgewinn, ein Auto, und hinter den anderen beiden die Nieten, je eine Ziege, warten. Nach dem sich der Kandidat für eine der Türen (z.B. A) entschieden hat, öffnet der Showmaster nun nicht die gewählte Tür (A), sondern eine andere (C), von der er weiß, dass dahinter eine Ziege steht, und bietet dem Kandidaten an, seine ursprüngliche Wahl (A) nochmals zu überdenken. Verbessert oder verschlechtert der Kandidat seine Chancen auf den Hauptgewinn, wenn er sich nun für Tür (B) entscheidet oder bleiben die Chancen gleich?

10.) **(AP 2007 BI)** Ein Getränkemarkt stellt den Kunden Einkaufswagen zur Verfügung, die mit einem Chip benützt werden können. Kunden, die keinen Chip besitzen, können sich an der Kasse einen Chip abholen. Somit ist sicher gestellt, dass jeder Kunde, wenn er es wünscht, einen Einkaufswagen benutzen kann. Bei einer Befragung der Kunden stellte sich heraus:
98% der Kunden, die einen Chip hatten, benutzten einen Einkaufswagen. 1% aller Kunden hatte einen Chip, benutzte aber keinen Einkaufswagen und 10% der Kunden, die keinen Chip hatten, verwendeten auch keinen Einkaufswagen.
Ermitteln Sie:

a) Wie viel Prozent aller Kunden hatten einen Chip? (Ergebnis: h(C)=50%)
b) Wie viel Prozent aller Kunden verwendeten keinen Einkaufswagen?
c) Wie viel Prozent der Kunden, die keinen Einkaufswagen benutzten, hatten einen Chip?

8.5 Die totale Wahrscheinlichkeit

Stellt man die Vierfeldertafel etwas geometrischer dar, dann sieht das ganze so aus:



Dann gilt für das Ereignis B:

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Wegen der Unvereinbarkeit der Ereignisse $(A \cap B)$ und $(\overline{A} \cap B)$ gilt dann:

$$P(B) = P\left((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\right)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$$

Die letzte Gleichung ist eine Formel für die totale Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B bezüglich der Zerlegung von Ω in A und $\overline{A}$.

Veranschaulichen Sie diesen Zusammenhang an einem Baumdiagramm.

Spielt man nun ein wenig herum, so folgt aus:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

und obiger Formel:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$$

Man nennt diese auch die Formel von Bayes (Thomas Bayes; 1702-1761).
Die breiteste Anwendung findet diese Formel gegenwärtig in der medizinischen Diagnostik.
Ob wir sie brauchen stellt sich noch heraus!

11a) Um die Güte eines Tests zur Untersuchung von Neurotikern zu prüfen, werden 100 Versuchspersonen, von denen 10 neurotisch sind, getestet. Von den gesunden Versuchspersonen erbrachte der Test bei 20% den Hinweis auf Neurotizismus, von den Neurotikern bei 90%. Zeigen Sie: Die

Wahrscheinlichkeit beträgt 33,3%, dass eine Person tatsächlich neurotisch ist, wenn der Test auf die Krankheit hingewiesen hat.

11b) Nach Überarbeitung des Tests wird unter den genannten Bedingungen (100 Versuchspersonen, davon 10 neurotisch) mit anderen Versuchpersonen ein neuer Versuch unternommen. Man erhält nun bei den Gesunden nur noch 10% und bei den Kranken in 95% der Fälle Hinweise auf Neurotizismus.
Zeigen Sie: Die Wirksamkeit des verbesserten Tests ist gegenüber der ursprünglichen Fassung von 33,3% auf 51,4% gestiegen.

12.) Bei der Übertragung der Zeichen „Punkt“ und „Strich“ in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen im Mittel 5% der gesendeten Punkte als Striche und 3% der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Punkten zu gesendeten Strichen ist $\frac{3}{5}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtige Zeichen empfangen wurde, falls
a) Punkt
b) Strich
empfangen wurde?