§ 7 Stochastische Unabhängigkeit

Kommen wir noch einmal zu dem Beispiel der Studenten (Raucher/Nicht-Raucher), die eine Prüfung bestanden bzw. nicht bestanden haben zurück.
Es ist bekannt, dass 40% der Studenten rauchen. 65% der Studenten haben die Prüfung bestanden. Der Anteil der Studenten, die nicht rauchen und die Prüfung bestanden haben beträgt 50%.
Etwas transparenter werden diese Zahlen, wenn man sie in eine Vierfelder-Tafel einträgt.

	Prüfung bestanden	**Prüfung nicht bestanden**	$\sum$
Raucher	0,15	0,25	0,40
Nichtraucher	0,50	0,10	0,60
$\sum$	0,65	0,35	1,00

Es stellt sich nun die Frage, ob es besser ist Raucher zu sein oder vielleicht Nicht-Raucher in Hinblick auf das Bestehen einer Prüfung.

Der Anteil der Raucher, die die Prüfung bestanden haben beträgt: $p_R = \frac{0,15}{0,40} = 0,375$.

Der Anteil der Nicht-Raucher, die die Prüfung bestanden haben beträgt dagegen:
$p_{NR} = \frac{0,50}{0,60} = 0,8\overline{3}$.

Somit ist es für einen Nicht-Raucher wahrscheinlicher die Prüfung zu bestehen als für einen Raucher.
Dieser starke Unterschied lässt darauf schließen, dass zwischen Rauchen und Bestehen der Prüfung ein enger Zusammenhang besteht.
In diesem Fall nennen wir die beiden Ereignisse Raucher (R) und Prüfung bestanden (B) stochastisch abhängig.
Da die Raucher nun alle hoffen, dass dem nicht so ist erwartet man, dass die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind.
Es wäre also zu erwarten, dass der Anteil der erfolgreichen Prüfungsteilnehmer unter den Rauchern ebenso groß ist wie ihr Anteil unter allen Studenten. Das Ergebnis könnte also so aussehen.

	Prüfung bestanden	**Prüfung nicht bestanden**	$\sum$
Raucher	0,26	0,14	0,40
Nichtraucher	0,39	0,21	0,60
$\sum$	0,65	0,35	1,00

Der Anteil der Raucher, die die Prüfung bestanden haben beträgt: $p_R = \frac{0,26}{0,40} = 0,65$.

Der Anteil der Nicht-Raucher, die ebenfalls die Prüfung bestanden haben beträgt:
$p_{NR} = \frac{0,39}{0,60} = 0,65$.

Das ist nun beide male genau der Anteil aller Studenten, die die Prüfung bestanden haben.

Formt man nun obige Gleichung etwas um:

$$\frac{0,26}{0,40} = 0,65$$

$$0,26 = 0,40 \cdot 0,65$$

und überlegt sich anhand der Vierfelder-Tafel woher diese einzelnen Wahrscheinlichkeiten kommen stellt man fest:

$$0,26 = 0,40 \cdot 0,65$$

$$P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B)$$

<u>Definition</u>: Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Andernfalls sind sie stochastisch abhängig.

Die Auswirkungen auf das Arbeiten mit einer Vierfelder-Tafel sind gravierend, denn jetzt reicht es, wenn lediglich zwei Größen in dieser gegeben sind.

Aufgaben:

1. Fülle die freien Plätze der folgenden Vierfeldertafel aus, wenn A und B stochastisch unabhängige Ereignisse sind:

	B	$\overline{B}$	
A	0,15	0,05	0,2
$\overline{A}$	0,60	0,20	0,80
	0,75	0,25	1

2. Beim Zusammenbau eines elektrischen Geräts werden u.a. ein Transistor und ein Kondensator gebraucht. Die Ausschusswahrscheinlichkeit für einen Transistor ist 5%, für einen Kondensator 4%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide in Ordnung, wenn man annimmt, dass sie unabhängig voneinander hergestellt wurden (was selbstverständlich erfüllt ist)?

	K	$\overline{K}$	
T	0,912	0,038	0,95
$\overline{T}$	0,048	0,002	0,05
	0,96	0,04	1

$$P(\text{Transitor in Ordnung}) = 0,95$$

$$P(\text{Kondensator in Ordnung}) = 0,96$$

$$P(\text{Beide Bauteile in Ordnung}) = 0,912$$

3.0 Es sei $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$. Begründe folgende Aussagen:

3.1 A und B unvereinbar $\Rightarrow$ A und B sind stochastisch abhängig

3.2 A und B unabhängig $\Rightarrow$ A und B vereinbar

3.1 $P(A\cap B)=P(\{\ \})=0\neq\underbrace{P(A)}_{>0}\cdot\underbrace{P(B)}_{>0}\ \Rightarrow$ A, B sind stochastisch abhängig

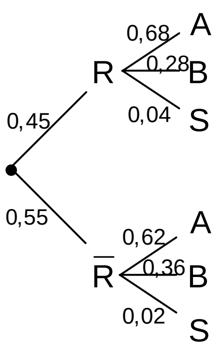
3.2 $P(A\cap B)=\underbrace{P(A)}_{>0}\cdot\underbrace{P(B)}_{>0}>0\ \Rightarrow\ P(A\cap B)>0\ \Rightarrow\ A\cap B\neq\{\ \}\ \Rightarrow$ A, B sind vereinbar

4. In einer Massenproduktion werden Schrauben einer bestimmten Sorte hergestellt. Aus dem Sortiment wird eine Schraube zufällig herausgegriffen. Erfahrungsgemäß sei die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Schraube 0,1 und für eine fehlerhafte Schraubenmutter 0,05. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Schraubenkopf und Schraubenmutter zusammenpassen, wenn sie unabhängig hergestellt werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist genau eines der beiden Teile defekt?

	M	$\overline{M}$	
S	0,855	0,045	0,9
$\overline{S}$	0,095	0,005	0,1
	0,95	0,05	1

5.0 **(2005 SI)** Ein Erlebnisparkbetreiber befragt eine große Zahl von Besuchern, ob sie aus der Region (R) kommen oder überregionale Besucher ($\overline{R}$) sind. Ferner interessiert, ob sie mit dem Auto (A), dem Bus (B) oder auf sonstige Weise (S) angereist sind. 45% der Befragten kommen aus der Region; von diesen haben 68% das Auto und 28% den Bus benutzt. 62% der überregionalen Besucher sind mit dem Auto angereist, 36% mit dem Bus.
Das Ergebnis der Befragung wird als Zufallsexperiment aufgefasst, die gegebenen Prozentsätze als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

5.1 Ermitteln Sie alle 6 Elementarereignisse des Zufallsexperiments und deren Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Baumdiagramms.



ω_i	$P(\{\omega_i\})$	E_1	E_2
RA	0,306		
RB	0,126	x	x
RS	0,018		x
$\overline{R}$A	0,341	x	
$\overline{R}$B	0,198	x	
$\overline{R}$S	0,011	x	

5.2 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:
E_1: „Ein Besucher kommt nicht aus der Region oder reist mit dem Bus an.“
E_2: „Ein Besucher stammt aus der Region und reist nicht mit dem Auto an.“
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an.

$E_1=\{RB;\overline{R}A;\overline{R}B;\overline{R}S\}$

$E_2=\{RB;RS\}$

5.3.0 Nach Angaben der Betreiber des Erlebnisparks gehen 75% der Besucher ins Varieté (V), 65% fahren mit der Wildwasserbahn (W), während 5% keines dieser beiden Angebote nutzen. Alle Prozentangaben werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

5.3.1 Beschreiben Sie die Ereignisse $E_1 = W \cap V$ und $E_2 = \overline{W \cup \overline{V}}$ möglichst einfach mit Worten im Sinne der vorliegenden Thematik. Berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten z. B. mit Hilfe einer Vierfeldertafel.

	V	$\overline{V}$	$\sum$
W	0,45	0,20	0,65
$\overline{W}$	0,30	0,05	0,35
$\sum$	0,75	0,25	1

$P(E_1) = P(W \cap V) = 0,45$ Besucher nutzen beiden Angebote

$P(E_2) = P\left(\overline{W \cup \overline{V}}\right) = P\left(\overline{W} \cap V\right) = 0,3$ Besucher geht ins Variete, fährt aber nicht mit der Wildwasserbahn

5.4 Untersuchen Sie durch Rechnung, ob die Ereignisse W und V stochastisch unabhängig sind.

$P(W) \cdot P(V) = 0,65 \cdot 0,75 = 0,4875 \neq 0,45 = P(W \cap V)$

$\Rightarrow$ W und V sind stochastisch abhängig.

5.5.0 Bei entsprechenden, vom Zufall abhängigen Voraussetzungen wird die Öffnungszeit des Parks verlängert. Die Zufallsgröße Y gibt die Verlängerung der Öffnungszeiten in Stunden an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich mit Hilfe eines Parameters $a \in \mathbb{R}$ so darstellen:

y	0	1	1,5	2
$P(Y = y)$	0,4	1,5a	a	0,5a

5.5.1 Berechnen Sie den Parameter a.

$$0,4 + 1,5a + a + 0,5a = 1$$
$$3a = 0,6$$
$$a = 0,2$$

6.0 **(2003 SI)** In einem Mischwald wird eine Versuchsfläche auf Schäden durch Wildverbiss an den Jungtrieben der Bäume untersucht. Einzige Nadelbaumart ist die Fichte (F); sie macht 25% des Baumbestandes aus. Auf der Versuchsfläche befinden sich außerdem 45% Buchen (B) ansonsten Eichen (E). Alle Baumarten kommen auf der Fläche gleichmäßig verteilt vor.
Bei einer Zählung werden folgende Schadenanteile durch Verbiss unter den jeweiligen Baumarten beobachtet: 20% bei Fichten, 30% bei Buchen und 25% bei Eichen.

Als Zufallsexperiment wird die Auswahl eines beliebigen Baumes betrachtet; dabei wird die Baumart festgestellt und geprüft, ob Verbiss (V) vorliegt oder nicht ($\overline{V}$). Die gegebenen Prozentsätze werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

6.1 Ermitteln Sie alle 6 Elementarereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Baumdiagramms.

6.2.0 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:

A_1: „Ein zufällig ausgewählter Baum ist ein Laubbaum ohne Verbiss“

A_2: „Ein zufällig ausgewählter Baum ist eine Fichte oder eine Eiche.“

6.2.1 Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an.

6.2.2 Prüfen Sie ob die beiden Ereignisse A_1 und A_2 stochastisch unabhängig sind.

6.3.0 Bei der Untersuchung von Kiefernadeln wird die Länge L von 200 zufällig ausgewählten Nadeln bestimmt und in sechs Längengruppen eingeteilt. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der jeweiligen Längengruppe an. Dabei ergibt sich folgende Verteilung mit $a; b \in \mathbb{N}$:

L in mm	$L \leq 40$	$40 < L \leq 44$	$44 < L \leq 48$	$48 < L \leq 52$	$52 < L \leq 56$	$L > 56$
Längengruppe	1	2	3	4	5	6
Anzahl	8	a	2a	90	b	12

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Nadel in einer der Längengruppe 4 bis 6 liegt, beträgt 0,66.

6.3.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b.

7.0 **(2002 SI)** Die Post eines kleineren Landes gibt den Druck einer neuen Sonderbriefmarke in Auftrag. Beim ersten Probedruck einer größeren Menge dieser Marken werden noch Fehler bei der Zähnung, beim Farbton sowie bei der Grafik festgestellt. Es kann davon ausgegangen werden, dass diese Fehlerarten unabhängig voneinander auftreten und dass die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens während des Probedrucks konstant bleiben.
Folgende Bezeichnungen seien vorgegeben:
Z: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Zähnung in Ordnung.
F: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Farbe in Ordnung.
G: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Grafik in Ordnung.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Farbfehler beträgt $P(\{\overline{F}\}) = 0{,}3$,
diejenige für eine Fehler bei der Zähnung $P(\{\overline{Z}\}) = 0{,}5$.

7.1 Eine zufällig ausgewählte Briefmarke wird hinsichtlich der Merkmale Z, F und G untersucht.
Veranschaulichen Sie alle möglichen Ergebnisse dieser Untersuchung mit Hilfe eines Baumdiagramms. Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler in der Grafik $P(\{\overline{G}\}) = 0{,}2$ beträgt, wenn bekannt ist, dass eine fehlerfreie Briefmarke mit der Wahrscheinlichkeit $P(\{ZFG\}) = 0{,}28$ auftritt. Bestimmen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse.

7.2 Nun werden folgende Ereignisse betrachtet:

E_1: „Eine zufällig ausgewählte Marke hat mindestens zwei Fehler oder einen Zähnungsfehler.“

E_2: „Eine zufällig ausgewählte Marke hat genau einen Fehler.“

Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch unabhängig sind.

7.3.0 Die Druckmaschine wird korrigiert. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fehlerarten an, die bei einer zufällig ausgewählten Briefmarke des neuen Drucks auftreten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann mit Hilfe eines geeigneten Parameters $a \in \mathbb{R}$ so dargestellt werden:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$0{,}4a$	$0{,}025a^2$	0,05	0,05

7.3.1 Berechnen Sie den Parameter a.

8.0 **(2002 SII)** Für eine Marktanalyse werden 2000 zufällig ausgewählte Bankkunden (beiderlei Geschlechts) danach befragt, ob sie beim Kauf von Wertpapieren eher risikofreudig (r) oder Konservativ (k) handeln.
Die Befragten sind – wie folgt – drei Altersgruppen zuzuordnen:
690 Personen zählen zu den jungen Anlegern (J), 780 zur Gruppe mittleren Alters (M) und 530 zu den Senioren (S).
800 der Kunden sind eher Konservative Anleger; davon sind 320 Senioren.
(Die folgenden drei Teilaufgaben beziehen sich ausschließlich auf die oben erwähnten 2000 Bankkunden!)

8.1 Die Analyse zeigt außerdem, dass die Anzahl der konservativen Anleger bei den Personen mittleren Alters dreimal so hoch ist wie bei den jungen Kunden. Ermitteln Sie auf Grund aller bisherigen Angaben die Anzahl der jungen konservativen Anleger. (Ergebnis: 120)

8.2 Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, mit der es sich bei einer zufällig ausgewählten Person um einen jungen, eher risikofreudigen Bankkunden handelt.

8.3 Untersuchen Sie, ob die Zugehörigkeit zur Gruppe der Senioren stochastisch unabhängig ist von der Zugehörigkeit zur Gruppe der konservativen Anleger.

9.0 In einer statistischen Erhebung über den Gesundheitszustand von Kindern im Vorschulalter wird festgestellt, dass 15% dieser Kinder an der Erkrankung A und 8% an der Erkrankung B leiden. 3% der untersuchten Kinder haben beide Erkrankungen.

9.1 Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_1 : Kind leidet an Erkrankung A oder B

E_2 : Kind hat keine Erkrankung

$E_3 = \overline{A \cap B}$

$E_4 = \overline{\overline{A} \cup B}$

Formulieren Sie die Ereignisse E_3 und E_4 mit einfachen Worten (im Sinne der vorliegenden Thematik)

9.2.1 Überprüfen Sie, ob die beiden Erkrankungen unabhängig voneinander auftreten.

10.0 In Winter ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand an Grippe erkrankt 30%. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gegen Grippe geimpfte Person erkrankt, beträgt 5%, dass eine nicht geimpfte Person nicht erkrankt, 40%.

10.1 Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel.

10.2 Überprüfen Sie die Ereignisse
E: Erkrankung an Grippe

G : Geimpft gegen Grippe
auf stochastische Unabhängigkeit.

10.3 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebige Person, nicht geimpft ist und an Grippe erkrankt.

10.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebige Person, entweder geimpft oder an Grippe erkrankt ist?

11.0 Von den 500 Schülern einer bestimmten Schule sind 55% weiblich (W). 30% der Schüler gehen zum Faschingsball (F). 80% der männlichen Schüler gehen nicht zum Faschingsball.

11.1 Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$E_1 = F \cap W$

$E_2 = \overline{\overline{F} \cap W}$

Drücken Sie diese beiden Ereignisse möglichst einfach mit Worten aus.

11.2 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse F und W stochastisch unabhängig sind.