§ 5 Kombinatorik

5.1 Das Zählprinzip

Bsp. 1: Wie viele Menüs kann man aus 2 Vorspeisen (Suppe, Blattsalat), 3 Hauptspeisen (Pizza, Lasagne, Fisch) und 2 Nachspeisen (Eis, Tiramisu) zusammenstellen?

Bsp. 2: Wie viele 5-buchstabige „Wörter“ lassen sich bilden, wenn kein Buchstabe doppelt vorkommen soll?

Bsp. 3: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es an drei verschiedene Sportler die Rangplätze 1, 2, 3 zu vergeben?

Allgemein kann man folgendes Zählprinzip aussprechen:
Gibt es bei einem n-stufigen Experiment (n-Tupel) für die Besetzung der

Bsp. 4: Es werden zwei unterscheidbare Würfel geworfen. Wie viele Ereignisse sind möglich?

Aufgaben:

1. In einer Klasse mit 25 Schülern sollen 2 Klassensprecher gewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?
2. In der einer staatlichen FOS/BOS gibt es zehn 11. Klassen und acht 12. Klassen. Zur Klassensprecherkonferenz kommen die beiden Klassensprecher einer Klasse. Von allen Klassensprechern sollen drei für eine Zusammenarbeit mit den Klassensprechern anderer Schulen ausgewählt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Wahl?

3. Bestimme die Anzahl aller zwei bzw. dreistelligen Zahlen.
4. Die 4 Orte A, B, C und D sind folgendermaßen miteinander verbunden: zwischen A und B gibt es 3 Straßen, zwischen B und C gibt es 4 Straßen, zwischen C und D gibt es 5 Straßen.
   a) Wie viele Reiserouten gibt es für die Fahrt von A über B und C nach D?
   b) Wie viele Rundreiserouten ABCDCBA gibt es? (Straße darf doppelt befahren werden)
   c) Ein Handelsvertreter macht eine solche Rundreise, wobei er in jedem Ort zufällig ein der möglichen Verbindungsstraßen auswählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit benutzt er keine Straße zweimal
5. Wie viele Flaggen mit drei waagrechten Streifen kann man bilden, wenn man dafür aus 7 Farben wählen kann und benachbarte Streifen nicht dieselbe Farbe haben dürfen?
6. 6 Politiker treffen sich zu einer Konferenz. Jeder begrüßt jeden per Hand schütteln. Wie viele Hände werden geschüttelt.
7. Wie viele „Wörter“ kann man aus den Buchstaben „EIS“ bilden? Wie viele aus den Buchstaben „SCHNEE“?
8. Ein Computerhändler verkauft seine sonst gleichartigen Computer mit fünf verschiedenen Monitoren, drei verschiedenen Festplatten und zwei verschiedenen Größen des Arbeitsspeichers. Er hat alle möglichen Konfigurationen aufgebaut in seinem Laden stehen. Wie viele Computer müssen mindestens im Laden stehen?
9. Jemand kann mit vier verschiedenen Fluglinien zwischen Wien und Paris fliegen. Wie viele Möglichkeiten hat er, eine Fluglinie für einen Flug von Wien nach Paris und zurück auszuwählen, wenn
   a) er für beide Flüge dieselbe Fluglinie
   b) er nicht unbedingt für beide Flüge dieselbe Fluglinie
   c) er für beide Flüge auf jedem Fall verschiedene Fluglinien wählt
10. Auf wie viele Arten kann man 5 Hotelgäste in 10 freie Einzelzimmer unterbringen?

5.2 Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge

Bsp. 1: Wie viele Ziffernpaare lassen sich aus den Ziffern 1, 2 und 3 bilden?

Bsp. 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es bei einem Kombinationsschloss eine fünfstellige Zahl einzustellen?

Allgemein gilt für ein k-Tupel aus einer n-Menge:

Urnenmodell: In einer Urne befinden sich 5 verschiedenfarbige Kugeln. Nacheinander werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie viele verschiedene „Ziehausgänge“ gibt es?

Bsp. 3: Bei einer Stadteinfahrt hat man 6 Ampeln zu passieren. Bei jeder Ampel hat man die zwei Möglichkeiten: „Anhalten“ - „Fahren“. Auf wie viele verschiedene Arten kann man die 6 Ampeln passieren?

Bsp. 4: 8 Personen stellen sich in einer langen Reihe für ein Foto auf. Jeder kann wählen, ob er dabei steht oder sitzt. Wie viele verschiedene Fotos sind denkbar?

Bsp. 5: Bei einem Fahrradschloss können auf drei Ringen jeweils die Ziffern 1 bis 6 eingestellt werden.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat man, eine Zahlenkombination einzustellen?

b) Ein Dieb weiß, dass der Fahrradbesitzer eine Vorliebe für gerade Zahlen hat. Er möchte alle Zahlenkombinationen probieren, die an der ersten und an der letzten Stelle eine gerade Ziffer haben. Wie viele derartige Kombinationen gibt es?

5.3 Anzahl der Permutationen aus einer n-Menge

Bsp. 1: Wie viele Möglichkeiten gibt es aus vier verschiedenen Ziffern (die alle ungleich Null sind) eine vierstellige Zahl zu bilden?

Bsp. 2: Beim 400m-Lauf stehen für 6 Starter genau 6 Bahnen zur Verfügung. Wie viele verschiedene Startaufstellungen gibt es?

Verallgemeinerung:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, n verschiedene Dinge der Reihe nach anzuordnen?
Jede solche Anordnungsmöglichkeit nennen wir eine Permutation.
Zu einer Menge mit n verschiedenen Elementen gibt es demnach:

Urnenmodell: In einer Urne befinden sich 5 verschiedenfarbige Kugeln. Diese werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Wie viele verschiedene „Ziehausgänge“ gibt es?

Bsp. 3: Eine Fußballmannschaft besteht bekanntlich aus 11 Spielern. Die 11 Spieler verlassen vor Spielbeginn der Reihe nach die Mannschaftskabine.
Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind dabei möglich?

Bsp. 4: Bei der Fußballweltmeisterschaft (Europameisterschaft) kommt es in den Finalspielen vor, dass eine Partie nach der Verlängerung unentschieden ist. Es kommt dann zum Elfmeterschießen. Der Trainer einer Mannschaft wählt dabei 5 Spieler aus. Nun ist es seine Aufgabe die Reihenfolge der Schützen zu bestimmen.

a) Wie viele Möglichkeiten hat er dies zu tun?

b) Wie viele Möglichkeiten hat er, wenn er die drei Treffsichersten zu letzt schießen lässt?

5.4 Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge

Bsp. 1: Beim Pferde-Toto „3 aus 18“ muss man von 18 Pferden 3 gemäß der Reihenfolge ihres Einlaufs ins Ziel ankreuzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es den Tippschein auszufüllen?

Bsp. 2: Wie viele fünf-buchstabige „Wörter“ lassen sich bilden, wenn kein Buchstabe doppelt vorkommen soll?

Definition:
Unter einer k-Permutation versteht man ein k-Tupel, bei dem alle Elemente verschieden sind und aus einer n-Menge ausgewählt werden.

Verallgemeinerung:
Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer n-Menge k verschiedene Elemente herauszugreifen (auszuwählen), wobei bei den herausgegriffenen Elementen auf deren Reihenfolge geachtet wird.

Urnenmodell: In einer Urne befinden sich 10 verschiedenfarbige Kugeln. Es werden nacheinander 4 Kugeln ohne Zurücklegen herausgenommen. Wie viele verschiedene „Ziehausgänge“ gibt es, wenn auf die Reihenfolge geachtet wird?

5.5 Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge

Bsp. 1: Beim Pferdelotto „4 aus 18“ sind vier von 18 Pferden auszuwählen. (Es sind hier nur die 4 Pferde interessant, die als erste ins Ziel kommen.) Es geht darum, die Teilmenge mit den vier Pferden, die als erste ins Ziel kommen, aus der Menge der 18 Pferde auszuwählen. Da ihre Reihenfolge egal ist führen jeweils $4! = 24$ der 4-Permutationen zu der gleichen 4-Teilmenge. Wir erhalten also die Anzahl der 4-Teilmengen, indem wird die Anzahl der 4-Permutationen durch $4!$ dividieren.

Bsp. 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Lotto „6 aus 49“ einen Tippschein auszufüllen?

Verallgemeinerung:
Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer n-Menge k verschiedene Elemente herauszugreifen (auszuwählen), wobei nicht auf die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente geachtet wird

Urnenmodell: In einer Urne befinden sich 10 verschiedenfarbige Kugeln. Es werden nacheinander 4 Kugeln ohne Zurücklegen herausgenommen (4 Kugeln gleichzeitig gezogen). Wie viele verschieden „Ziehausgänge“ gibt es, wenn die Reihenfolge der gezogenen Kugeln egal ist?
(Es kommt also nur auf die Farbkombinationen an!)

Bsp. 3: Der Trainer will für ein Elfmeterschießen 5 Spieler aus seiner Mannschaft auswählen. Wie viele Möglichkeiten hierfür gibt es?

Bsp. 4: Bei einem Fest stoßen alle sechs der Anwesenden miteinander an, nacheinander und jeder mit jedem einmal. Wie oft erklingen die Gläser?

Bsp. 5: Wie oft kollidieren zwei Gläser, wenn sich 8 Freunde in einem Lokal zuprosten wollen und keiner jemanden auslässt?

Bsp. 6: Auf wie viele Arten kann man aus 9 Personen einen Dreierausschuss wählen, innerhalb dessen es auf die Reihenfolge nicht ankommt?

Bsp. 7: In einem Raum gibt es 8 Lampen, die man unabhängig voneinander ein- und ausschalten kann. Wie viele Beleuchtungsarten gibt es, wenn genau 5 Lampen brennen sollen?

Zusammenfassung:
Für die Auswahl von k Elementen aus einer n-Menge ergeben sich, abhängig vom Auswahlverfahren, folgende Anzahlen:

	mit Beachtung der Reihenfolge	ohne Beachtung der Reihenfolge
mit Wiederholung	k-Tupel aus n-Menge n^k	k-Kombinationen aus n-Menge $\binom{n+k-1}{k}$
ohne Wiederholung	k-Permutationen aus n-Menge $\frac{n!}{(n-k)!}$	k-Teilmenge aus n-Menge $\binom{n}{k}$

5.6 Beispiele und Anwendungen

Bsp. 1: Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI anordnen, so dass „Wörter“ entstehen?

Analog mit HONOLULU:

Analog mit ALUMINIUMMINIMUM:

Bsp. 2: Eine Urne enthält fünf schwarze und drei weiße gleichartige Kugeln. Nacheinander werden sechs Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden genau vier schwarze Kugeln gezogen?

Bsp. 3: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Zahlenlotto “6 aus 49“ in einem Tipp genau 3 richtige zu tippen?

Bsp. 4: Bei einem Kartenspiel werden 32 Karten auf 4 Spieler verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekomme ich alle 4 Asse?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt einer der 4 Spieler die 4 Asse?

Bsp. 5: Ein großes Kopiergerät ist repariert worden und wird auf seine Funktionsfähigkeit hin geprüft. Man ist nicht mehr bereit einen Ausschuss von 5% noch zu akzeptieren. Ein Angestellter entnimmt einem Satz von 100 Kopien zufällig 20 Stück und reklamiert die Reparatur, da genau 1 Kopie fehlerhaft ist. Ist dieses Vorgehen sinnvoll?

Aufgaben

1. Eine Urne enthält 5 Kugeln, die nummeriert sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 Kugeln zugleich (d.h. ohne Zurücklegen) herauszugreifen?
2. Eine Urne enthält 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau 2 weiße Kugeln zugleich herauszuziehen?
3. Eine Gruppe von 10 Schülerinnen soll im Sportunterricht so in Paare eingeteilt werden, dass beim Hundertmeterlauf jede gegen jede genau einmal läuft. Wie viele Läufe sind durchzuführen?
   Ein Lauf bedeutet: Auswahl einer 2-Teilmenge aus einer 10-Menge.
4. In einer Prüfung müssen 4 Aufgaben bearbeitet werden, die der Prüfling je zur Hälfte aus 2 Aufgabengruppen mit je 5 Aufgaben auswählen kann. Wie viele Möglichkeiten hat der Prüfling?
5. In einer Pralinenschachtel befinden sich 7 Likörpralinen und 3 Nußpralinen.
   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Pralinen zu wählen?
   b) Jemand greift zufällig in die Schachtel und erwischt 3 Nußpralinen. In welchem Bruchteil aller Fälle wird dies möglich sein?
   c) Jemand greift zufällig in die Schachtel und erwischt 3 Likörpralinen. In welchem Bruchteil aller Fälle wird dies möglich sein?
6. Ein König beschließt in seinem Reich eine Gebietsreform. Dabei soll jede neu zu bildende Provinz eine Fahne erhalten. Zur Verfügung stehen die heraldischen Farben Rot, Blau, Schwarz, Grün, Gold, Silber und Purpur.
   a) In wie viele Provinzen kann das Land höchstens eingeteilt werden, wenn die Fahne eine Trikolore sein soll und
      1.) keine weiteren Bedingungen gestellt werden,
      2.) der oberste Streifen der Trikolore golden sein muss,
      3.) einer der 3 Streifen der Trikolore golden sein muss?
      4.) Wie viele neuen Provinzen könne gebildet werden, wenn die Fahne zwar aus 3 Streifen bestehen, der untere und der obere Streifen aber gleichfarbig sein sollen?
7. Von A nach B führen 7 Wege. Von B nach C führen 4 Wege.
   a) Wie viele Wege führen von A nach C über B?
   b) Von C nach D führen 9 Wege. Wie viele Wege führen von A nach D über B und C?
8. Wie viele verschiedene 5stellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 0, 1, 2, 3, 4 bilden, wenn
   a) in jeder Zahl alle Ziffern verschieden sein sollen?
   b) die Bedingung a) nicht erfüllt sein soll?
9. In einer Disco vergnügen sich 40 Paare; 40% der Mädchen sind jünger als 18 Jahre. Die Polizei kontrolliert nach 24 Uhr das Alter der Mädchen und überprüft auf gut Glück 3 Mädchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Polizeibeamten ohne Beanstandung das Lokal verlassen?
10. Elektrische Christbaumkerzen werden in Reihe geschaltet Das bedeutet, dass die Kerzenkette nur dann brennt, wenn keine Kerze defekt ist. Der Hersteller liefert die einzelnen Kerzen erfahrungsgemäß mit 5% Ausschuss. Aus einem Karton mit 100 Kerzen werden 12 Kerzen entnommen und zu einer Kette montiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt diese?
11. Vor einigen Jahren erregte die Meldung Aufsehen, das in einer großen Lieferung von importiertem Thunfisch in Dosen hohe Quecksilberrückstände festgestellt wurden. In einem Supermarkt wurden von 40 Dosen, von denen $\frac{1}{4}$ aus der beanstandeten Lieferung stammten, bereits die Hälfte verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist noch keine gefährliche Dose verkauft worden?

12. Unter den 50 Angestellten einer Firma befinden sich 10% Unsympathen.
    a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 6 angesprochenen Angestellten genau 2 der Unsympathen?
    b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich unter 6 angesprochenen Angestellten genau 1 Unsympath?
    c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich unter 6 angesprochenen Angestellten kein Unsympath?
    d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 6 angesprochenen Angestellten höchstens 2 Unsympathen?