§ 2 Ereignis, Ereignisraum und Ereignisalgebra

In der Regel interessiert man sich bei einem Zufallsexperiment nicht für den ganzen Ergebnisraum, sondern nur für ein Ergebnis oder einen Teil des Ergebnisraums. So setzt man beim Roulette-Spiel z.B. auf alle schwarzen Felder, alle geraden Zahlen, auf eine Reihe oder z.B. auf mehrere verschiedene Zahlen. Solche Mengen nennt man Ereignisse.

2.1 Ereignis und Ereignisraum

Definition: Ist Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, so heißt jede Teilmenge $E \subseteq \Omega$ ein <u>Ereignis</u>.
Die Menge aller Ereignisse aus Ω heißt <u>Ereignisraum</u> $\wp(\Omega)$.
($\wp$ ist dabei ein Symbol für die Potenzmenge!)

Man sagt das Ereignis E ist eingetreten, wenn das im Experiment auftretende Ergebnis ein Element der Menge E ist.
Ist $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_m\}$ der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, so heißen die Ereignisse $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_m\}$ die <u>Elementarereignisse</u> des Ergebnisraumes.
Ein Elementarereignis entspricht somit einem einzelnen Ergebnis.

<u>Beispiele für Ereignisse</u>:
1.) Roulette: $\Omega = \{0; 1; 2; 3; .... ; 34; 35; 36\}$

SETZUNG	FACHAUSDRUCK (FRZ.)	ANZAHL ZAHLEN	BEISPIELZAHLEN	AUSZAHLUNG
Ganze Zahl	Pleine	1	$\{7\}$	36-fach
Halbe Zahl	Cheval	2	$\{26; 29\}$	18-fach
Reihe	Transversal pleine	3	$\{28; 29; 30\}$	12-fach
Karo	Carré	4	$\{26; 27; 29; 30\}$	9-fach
Linie	Transversal simple	6	$\{28; 29; 30; 31; 32; 33\}$	6-fach
Dutzend	Dutzend	12	1 bis 12	3-fach
Spalte	Kolonne	12	Längsreihe von 12 Zahlen	3-fach
Rot	Rouge	18	Alle roten	2-fach
Schwarz	Noir	18	Alle schwarzen	2-fach
Gerade	Pair	18	Alle geraden	2-fach
Ungerade	Impair	18	Alle ungeraden	2-fach
1. Hälfte	Manque	18	1 bis 18	2-fach
2. Hälfte	Passe	18	19 bis 36	2-fach

Man hat hier zu einem Ergebnisraum viele verschiedene Ereignisse. Beim Roulette haben die Ereignisse einen frz. Namen. In der Mathematik weist man aber einem Ereignis den Buchstaben E zu (und versieht diesen evtl. mit einem Zahlenindex).

Man sagt, das Ereignis E_1 (Rouge) sei eingetreten, wenn beim einmaligen Wurf der Kugel eine rote Zahl geworfen wurde.

$E_1 = \{1; 3; 5; 7; 9; 12; 14; 16; 18; 19; 21; 23; 25; 27; 30; 32; 34; 36\}$

E_2 : Manque

$E_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18\}$

E_3 : 1. Kolonne

$E_3 = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34\}$

2.) Werfen eines Würfels: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Betrachten Sie nun folgende Ereignisse:

E_1: Augenzahl ist ungerade $\Rightarrow$ $E_1 =$

E_2: Augenzahl ist gerade $\Rightarrow$ $E_2 =$

E_3: Augenzahl ist durch 3 teilbar $\Rightarrow$ $E_3 =$

E_4: Augenzahl ist Primzahl $\Rightarrow$ $E_4 =$

E_5: Augenzahl ist größer als 3 $\Rightarrow$ $E_5 =$

3.) Augensumme beim Werfen zweier Würfel: $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

Betrachten Sie nun folgende Ereignisse:

E_1: Augensumme ist ungerade $\Rightarrow$ $E_1 =$

E_2: Augensumme ist gerade $\Rightarrow$ $E_2 =$

E_3: Augensumme ist durch 3 teilbar $\Rightarrow$ $E_3 =$

E_4: Augensumme ist eine Primzahl $\Rightarrow$ $E_4 =$

E_5: Augensumme ist durch 4 teilbar $\Rightarrow$ $E_5 =$

E_6: Augensumme ist 6, 7 oder 8 $\Rightarrow$ $E_6 =$

E_7: Augensumme ist kleiner als 6 $\Rightarrow$ $E_7 =$

E_8: Augensumme ist größer oder gleich 9 $\Rightarrow$ $E_8 =$

E_9: Augensumme besitzt die Teiler 3 und 4 $\Rightarrow$ $E_9 =$

E_{10}: Augensumme besitzt die Teiler 3 oder 4 $\Rightarrow$ $E_{10} =$

Besondere Ereignisse:

a) Ereignisse mit nur einem Element heißen Elementarereignisse.
   Ist $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_m\}$ der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, dann sind die Ereignisse $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_m\}$ die Elementarereignisse des Ergebnisraumes.
b) Das Ereignis Ω heißt sicheres Ereignis, da es stets eintritt.
c) Das Ereignis $\{\ \}$ („leere Menge“) heißt unmögliches Ereignis, da es nie eintreten kann.

d) Als Komplement $\overline{E}$ eines Ereignisses E bezeichnet man die Menge derjenigen Elemente aus Ω, die nicht Element von E sind.
Man nennt dann $\overline{E}$ auch das Gegenereignis von E.

<u>Beispiele für Ereignisräume</u>:

a) Werfen einer Münze
$\Omega = \{\text{Kopf; Zahl}\}$
$A_1 = \{\ \},\ A_2 = \{\text{Kopf}\},\ A_3 = \{\text{Zahl}\},\ A_4 = \{\text{Kopf, Zahl}\}$
$\wp(\Omega) = \{\{\ \}; \{\text{Kopf}\}; \{\text{Zahl}\}; \{\text{Kopf; Zahl}\}\}$
Es gilt: $|\Omega| = 2$
$|\wp(\Omega)| = 4$

b) Einmaliges Ziehen einer Kugel aus einer Urne, die schwarze, rote und weiße Kugeln enthält.
$\Omega = \{s; w; r\}$
$E_1 = \{s\}; E_2 = \{r\}; E_3 = \{w\}; E_4 = \{s; r\}; E_5 = \{s; w\}; E_6 = \{w; r\}; E_7 = \{s; r; w\}; E_8 = \{\ \}$
$\wp(\Omega) = \{\{s\}; \{r\}; \{w\}; \{s; r\}; \{s; w\}; \{w; r\}; \{s; r; w\}; \{\ \}\}$
Es gilt: $|\Omega| = 3$
$|\wp(\Omega)| = 8$

Bemerkung (ohne Beweis):
Für die Mächtigkeit des Ereignisraumes $\wp(\Omega)$ gilt: $|\wp(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$

2.2 Ereignisalgebra

Häufig interessiert man sich nicht nur für ein Ereignis, sondern auch für die Verknüpfung von Ereignissen.
So kann es z.B. interessant sein, wenn zwei Personen A und B Roulette spielen, dass

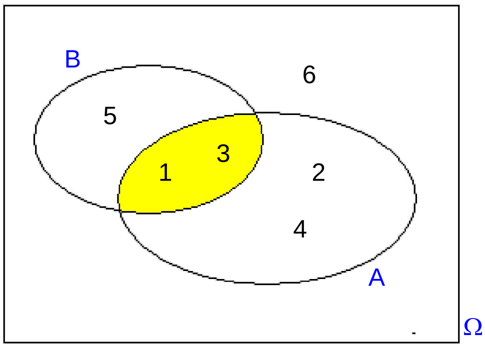
a) A und B gleichzeitig gewonnen haben.
Man schreibt dafür: $A \cap B$
b) A oder B, d.h. dass mindestens einer davon gewonnen hat.
Man schreibt dafür: $A \cup B$
c) Nicht A, d.h. dass A nicht gewonnen hat.
Man schreibt dafür: $\overline{A}$

Für die Darstellung solcher Verknüpfungen verwendet man sogenannte Venn-Diagramme.

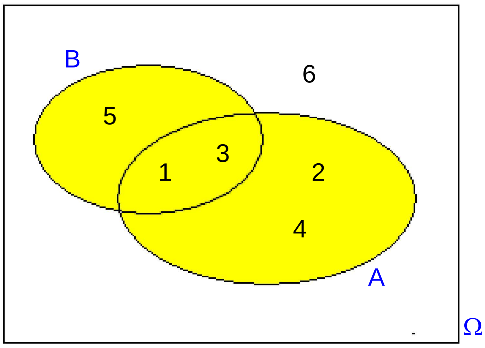
Wir wollen einige Verknüpfungen an einem Zufallsexperiment verdeutlichen. Dazu zeichnen wir auch das dazugehörige Venn-Diagramm.
Beispiel: Werfen eines Würfels
Für den Ergebnisraum Ω gilt: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Wir betrachten nun die Ereignisse:
A : Zahl ist höchstens 4
B : Zahl ist ungerade
Also: $A = \{1; 2; 3; 4\}$ und $B = \{1; 3; 5\}$

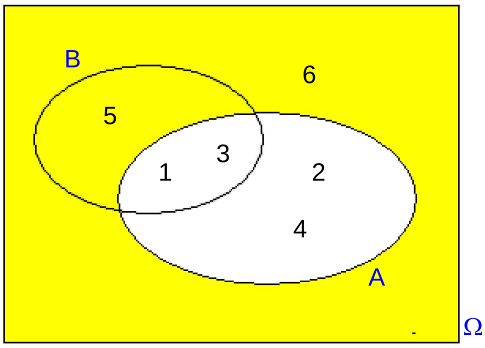
a) $A \cap B$
$A \cap B = \{1; 3\}$
$A \cap B$ tritt ein, wenn A und B zugleich eintritt



b) $A \cup B$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
$A \cup B$ tritt ein, wenn A oder auch B eintritt



c) $\overline{A}$
$\overline{A} = \{5; 6\}$
$\overline{A}$ tritt ein, wenn A nicht eintritt



Darüber hinaus gelten folgende Rechengesetze:

1.) Kommutativgesetz:

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$

2.) Assoziativgesetz:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3.) Distributivgesetz:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4.) Gesetze für das Komplement:

$A \cap \overline{A} = \{\ \}$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = \Omega$

5.) Gesetze für Ω und $\{\ \}$:

$A \cap \Omega = A$ $\qquad$ $A \cup \{\ \} = A$

$A \cap \{\ \} = \{\ \}$ $\qquad$ $A \cup \Omega = \Omega$

$\overline{\{\ \}} = \Omega$ $\qquad$ $\overline{\Omega} = \{\ \}$

$A \cap A = A$

6.) Gesetze von de Morgan:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Aufgaben:

1.) Beweise formal durch Anwenden der mengenalgebraischen Gesetze:

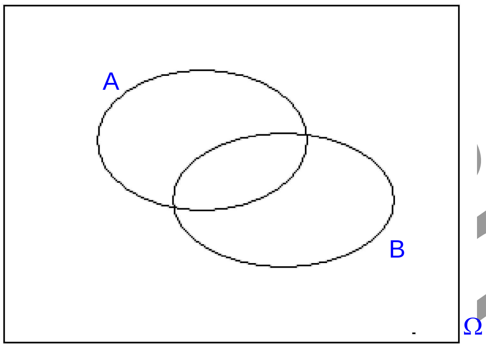
a) $A \cap \left(A \cap \overline{\{\ \}}\right) =$

b) $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) =$

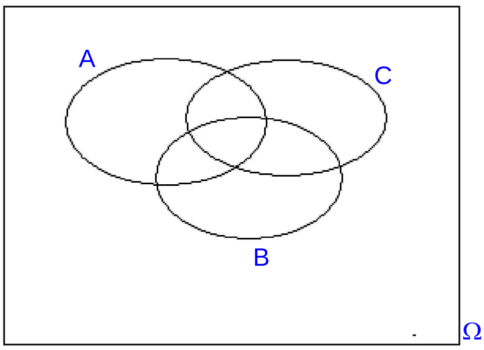
c) $(A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right) =$

2.) Schraffiere das Gebiet im angegebenen Venn-Diagramm.

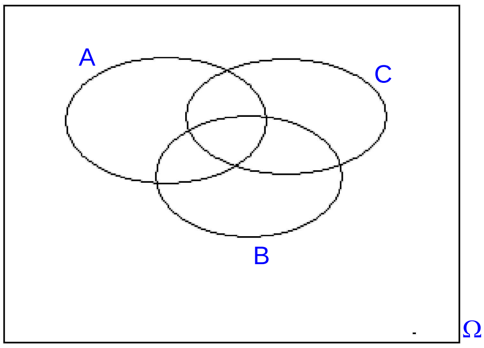
a) $(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$



b) $A \cup \left(B \cap \overline{C}\right)$



c) $\left(A \cup B\right) \cap \overline{C}$



Definition: Zwei Ereignisse A, B heißen <u>unvereinbar</u>, wenn gilt:

$$A \cap B = \{\ \}$$

Ist $A \cap B \neq \{\ \}$, so sind die Ereignisse A und B <u>vereinbar</u>.

Aufgaben:

1.0 Beim Würfeln interessieren die geworfene Augenzahl. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet.

$$A = \{2; 4\},\ B = \{2; 6\} \text{ und } C = \{2; 4; 6\}$$

1.1 Bilden Sie die Ereignisse: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cup B$, $\overline{A} \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

1.2 Interpretieren Sie das Ereignis $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ und stellen Sie es im Venn-Diagramm und als Menge dar.

2.0 Beim zweifachen Münzwurf mit $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$ sind die drei Ereignisse

A: „Mit dem ersten Wurf K“
B: „Mit dem zweiten Wurf K“
C: „Genau mit einem Wurf K“
gegeben.

2.1 Zeigen Sie, dass jedes der drei Ereignisse A, B, C genau dann eintritt, wenn von den beiden anderen genau eines eintritt.

3.0 Beim Spiel *Papier-Schere-Stein* müssen zwei Spieler auf ein Signal entweder die offene Hand (Papier), zwei gestreckte Finger (Schere) oder die Faust (Stein) zeigen, wobei der jeweilige Sieger nach festen Regeln ermittelt wird: Die Schere schneidet das Papier, das Papier wickelt den Stein ein, der Stein macht die Schere stumpf. Es gewinnt

Schere gegen Papier
Papier gegen Stein
Stein gegen Schere

3.1 Stellen Sie zunächst den Ergebnisraum Ω dar und geben Sie seine Mächtigkeit an.

3.2 Stellen Sie folgende Ereignisse dar:
A: „Der 1. Spieler gewinnt“
B: „Der 2. Spieler gewinnt“
C: „Einer der beiden Spieler gewinnt“
D: „Kein Spieler gewinnt“

3.3 In einer kleinen Spielerweiterung können zwei Finger zu einem o geformt werden (Brunnen). Geben Sie hierfür den Ergebnisraum Ω an und stellen Sie die Ereignisse A, B, C und D (siehe 3.2) dar.

4.0 A und B seien zwei Ereignisse. Drücken Sie folgende Aussagen symbolisch aus:
4.1 Beide Ereignisse treten ein.
4.2 Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein.
4.3 Keines von beiden Ereignissen tritt ein.
4.4 Mindestens eins von den beiden Ereignissen tritt ein.
4.5 Genau eines von beiden Ereignissen tritt ein.

5.0 A, B und C symbolisieren drei Ereignisse. Drücken Sie folgende Aussagen symbolisch aus.
5.1 Alle drei Ereignisse treten ein.
5.2 Keines der drei Ereignisse tritt ein.
5.3 Genau eines der drei Ereignisse tritt ein.
5.4 Mindestens eines der drei Ereignisse tritt ein.
5.5 Höchstens eines der drei Ereignisse tritt ein.
5.6 Genau zwei der drei Ereignisse treten ein.
5.7 Mindestens zwei der drei Ereignisse treten ein.
5.8 Höchstens zwei der drei Ereignisse treten ein.
5.9 Nur die Ereignisse B und C treten ein.
5.10 Nur das Ereignis C tritt ein.

6.0 In einem Kraftwerk wird die Havarie einer Anlage von drei unabhängig voneinander arbeitenden Kontrollsignalen angezeigt. Diese unterliegen einer gewissen Störanfälligkeit.
S_i sei das Ereignis: „Das i-te Signal funktioniert“ $\left(i = 1, 2, 3\right)$.

6.1 Drücken Sie die folgenden Ereignisse durch die S_i aus:
A: „Alle drei Signale funktionieren“.
B: „Kein Signal funktioniert“.
C: „Mindestens ein Signal funktioniert“.
D: „Genau zwei von drei Signalen funktionieren“.
E: „Mindestens zwei der drei Signale funktionieren“.
F: „Genau ein Signal funktioniert“.

7.0 Eine Anlage besteht aus drei Kesseln, zwei Turbinen und einem Generator. Wir führen folgenden Ereignisse ein:
A: „Der Generator ist arbeitsfähig“.
B_i: „Der i-te Kessel ist arbeitsfähig“ $\left(i = 1, 2, 3\right)$.
C_k :“Die k-te Turbine ist arbeitsfähig“ $\left(k = 1, 2\right)$.

7.1 D kennzeichne die Arbeitsfähigkeit der Anlage. Sie ist gewährleitstet, wenn der Generator, mindestens ein Kessel und mindestens eine Turbine funktionstüchtig sind. Drücken Sie das Ereignis D durch die Ereignisse A, B_i und C_k aus.

8.0 Drei Schüler gehen mit ihren Freundinnen zum Tanzen. Bei einem Tanzspiel werden auf gut Glück Tanzpaare gebildet. A_i sei das Ereignis „Schüler Nr. i tanzt mit seiner Freundin“. Beschreiben Sie folgende Ereignisse mit Worten

8.1 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

8.2 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

8.3 $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$

8.4 $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

8.5 $\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right)$

9.0 Unter den Teilnehmer einer Versammlung wird eine Person zufällig ausgewählt.
Folgende Ereignisse seien definiert:
M: „Die Person ist männlich"
R: „Die Person raucht"
V: „Die Person ist verheiratet"

9.1 Was bedeutet $M = R$, $M \cap R = M$, $M \cap R \cap V = M$?

9.2 Beschreiben Sie die Ereignisse $R \cap V$, $R \cup V$.

9.3 Drücken Sie folgendes Ereignis symbolisch aus: „Die ausgewählte Person ist männlich, sie raucht nicht und ist nicht verheiratet".

9.4 Beschreiben Sie das Ereignis $M \cap \left(\overline{R \cap V}\right)$.

10. Untersuchen Sie, ob folgende Ereignisse unvereinbar sind.
a) A und $\overline{A \cup B}$
b) A und $\overline{A \cap B}$
c) A und $\overline{A} \cap B$
d) $\overline{A \cup B}$ und $\overline{A} \cap B$

11. Prüfen Sie die Gültigkeit folgender Behauptungen.
a) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\overline{A}$, $\overline{B}$ unvereinbar
b) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\overline{A}$, B unvereinbar
c) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\overline{A}$, $\overline{B}$ nicht unvereinbar
d) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\overline{A}$, B nicht unvereinbar
Geben Sie gegebenenfalls Gegenbeispiele an.