§ 12 Testen von Hypothesen

12.1 Ein einführendes Beispiel

Ein Importeur behauptet, dass 10% der von ihm angebotenen Mandarinen Kerne haben. Der Großhändler vermutet jedoch, dass mehr als 10% der Mandarinen Kerne enthalten und möchte daher seine Vermutung überprüfen.

<u>Definition:</u> Eine *Hypothese* (Vermutung) ist eine Behauptung über die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses

Um nun die Hypothese zu überprüfen müssen wohl oder übel ein paar Mandarinen untersucht werden. Da man aber nicht alle Mandarinen öffnen will und kann muss eine *Stichprobe* genommen werden. Die Anzahl der dabei erzielten Treffer; hier also die Anzahl der Mandarinen mit Kernen nennt man dann die *Testgröße* X.
Man einigt sich nun also eine Stichprobe von $n = 20$ Mandarinen zu untersuchen.
Nun haben 3 Mandarinen Kerne, d.h die Testgröße hat den Wert $X = 3$.
Doch wie kann nun der Ausgang dieses Testes interpretiert werden? Wer hat also Recht?
Man hätte doch, wenn man von einer Binomialverteilung ausgeht, mit 2 Mandarinen mit Kernen gerechnet (erwartet). Nun sind es aber 3. Also zuviel. Der Großhändler sieht sich nun in seiner Vermutung bestätigt und behauptet, dass der Anteil der Mandarinen mit Kernen größer als 0,1 ist.
Hat der Großhändler recht?
Der Importeur allerdings hat bei Herrn Stark im Mathematikunterricht gut aufgepasst und rechnet dem Großhändler vor, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 Mandarinen mit Kernen unter den 20 untersuchten sind

$$P_{0,1}^{20}\left(X \geq 3\right) = 1 - P_{0,1}^{20}\left(X \leq 2\right) = 1 - 0,67693 = 0,32307 \approx 32,2\%$$

beträgt.
Der Großhändler, der sehr sozial ist, sieht dies nun ein und erkennt, dass seine Wahrscheinlichkeit sich zu irren doch relativ hoch ist. Der Großhändler nimmt nun die Ware anstandslos an.

Hätten sich die Beiden (Importeur und Großhändler) im Vorfeld schon ihre Gedanken gemacht, so hätten sie eine Entscheidungsregel getroffen an Hand welcher die Hypothese bestätigt oder abgelehnt wird.
Das könnte dann also so aussehen:
Der Importeur behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit für Kernmandarinen $p = 0,1$ beträgt und sich nicht geändert hat. Er bekommt recht, wenn die Anzahl der Kernmandarinen der Stichprobe einen gewissen Wert k nicht überschreitet.
Da ja auch der Importeur den wahren Anteil der Kernmandarinen nicht kennt nennt man seine Hypothese (Vermutung), dass alles beim Alten $\left(p = 0,1\right)$ geblieben ist die *Nullhypothese* und bezeichnet sie mit H_0. Sie ist bestätigt, wenn die Anzahl der Kernmandarinen in einem bestimmten Bereich, dem *Annahmebereich* $A = \left\{0;1;...;k\right\}$ der Hypothese liegt.
Der Großhändler dagegen vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für Kernmandarinen größer, also $p > 0,1$ ist. Da Beide gegensätzlicher Meinung sind, nennt man die Hypothese des Großhändler die *Gegenhypothese* $H_1 = \overline{H}_0$. Er

bekommt recht, wenn die Anzahl der Kernmandarinen im Ablehnungsbereich $\overline{A}=\{k+1;...;20\}$ der Hypothese liegt.

Die beiden einigen sich auf eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens $\alpha = 5\%$, d.h. sie führen einen *signifikanten* Test durch. (In der Medizin werden *hochsignifikante* Tests durchgeführt deren Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens $\alpha = 1\%$ beträgt)

Die beiden wollen nun im Vorfeld, also vor der Durchführung der Stichprobe, wissen wie groß die Anzahl k der Kernmandarinen höchstens sein darf, so dass signifikant davon ausgegangen werden kann, dass sich die Wahrscheinlichkeit also nicht geändert hat.

Also hat man zu berechnen

$$P_{0,1}^{20}\left(X \geq k+1\right) < 0,05$$
$$1-P_{0,1}^{20}\left(X \leq k\right) < 0,05$$
$$P_{0,1}^{20}\left(X \leq k\right) > 0,95 \quad \Rightarrow \quad k=4$$

Somit folgt für den Annahmebereich der Nullhypothese: $A=\{0;1;2;3;4\}$

und für den Ablehnungsbereich: $\overline{A}=\{5;6;...;20\}$

Wären also höchstens 4 Kernmandarinen in der Stichprobe gewesen, so müssen beide davon ausgehen, dass sich der Anteil der Kernmandarinen nicht geändert hat.

Bemerkung:
Überprüft man eine Hypothese durch eine Stichprobe, so lässt es sich nie ganz vermeiden, dass das Stichprobenverfahren zu einer falschen Beurteilung führt. Grundsätzlich gibt es zwei Arten von Fehlern:

- ein **Fehler 1. Art** (α-Fehler) tritt auf, wenn aufgrund eines Stichprobenergebnisses eine Hypothese zurückgewiesen wird, obwohl sie wahr ist. Die Wahrscheinlichkeit hierfür nennt man **Risiko 1. Art** bzw. **Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art**.

- ein **Fehler 2. Art** (β-Fehler) tritt auf, wenn aufgrund eines Stichprobenergebnisses eine Hypothese akzeptiert wird, obwohl sie in Wirklichkeit falsch ist. Die Wahrscheinlichkeit hierfür heißt **Risiko 2. Art** bzw. **Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art**.

Wahrheit

		H_0 ist richtig	H_0 ist falsch
Entscheidung für	H_0	richtig	**Fehler 2. Art**
	$\overline{H}_0$	**Fehler 1. Art**	richtig

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art kann mit Hilfe des Tafelwerks bzw. der Normalverteilung ermittelt werden. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art kann dagegen nicht berechnet werden.

Aufgaben:

1. Ein Importeur gibt an, dass (höchstens) 10% der von ihm angebotenen Mandarinen Kerne haben. Um diese Aussage zu überprüfen entnimmt ein Großhändler der Lieferung 50 Mandarinen. Enthalten mehr als 8 der 50 Mandarinen Kerne, lehnt der Großhändler die Lieferung ab.

a) Geben Sie die Testgröße, die Nullhypothese und die Gegenhypothese sowie den dazugehörigen Annahme- und Ablehnungsbereich an.

b) Beschreiben Sie den Fehler 1. Art und bestimmen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

2. (NT 2003 SI) Verschiedenen Zählungen zufolge weisen in einem Wald 20% der Fichten einen Schaden durch Wildverbiss auf. Bei einer Waldbegehung wird vermutet, dass sich der Schadensanteil bei Fichten vergrößert hat. Um dies zu überprüfen, werden 200 zufällig ausgewählte Fichten auf Wildverbiss untersucht. Sind hiervon mehr als 50 geschädigt, wird diese Vermutung bestätigt.

a) Geben Sie die Testgröße, die Nullhypothese und den Ablehnungsbereich der Nullhypothese an.

b) Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit man sich irrtümlich für eine Vergrößerung des Schadensanteils entscheidet.

c) Beschreiben Sie, worin bei diesem Beispiel der Fehler 2. Art besteht.

3. In der Parapsychologie beschäftigt man sich unter anderem mit der Frage, ob es Menschen gibt, die über eine besondere Begabung verfügen, die sich naturwissenschaftlich nicht erklären lässt.
   Ein einfaches Experiment geht auf den amerikanischen Parapsychologen *Rhine* zurück.
   Dabei muss eine Testperson eine aus fünf verschiedenen Karten identifizieren ohne sie vorher gesehen zu haben. Hat die Testperson keine "besondere" Begabung, so wird sie sich aufs Raten verlassen. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist somit $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Im Falle besonderer Begabung müsste die Trefferwahrscheinlichkeit größer als 0,2 sein.
   Eine Person führt diesen Test nun 10 mal durch und kann dabei drei mal die richtige Karte identifizieren. Daraufhin wird dieser Person eine "besondere" Begabung attestiert.

a) Geben Sie die Testgröße, die Nullhypothese und den Ablehnungsbereich der Nullhypothese an.

b) Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit man der Person irrtümlich eine "besondere" Begabung attestiert.

c) Beschreiben Sie, worin bei diesem Beispiel der Fehler 2. Art besteht.

12.2 Der einseitige Signifikanztest

Oft ist die irrtümliche Verwerfung einer Hypothese verhängnisvoll. Die Entscheidungsregel muss daher so festgelegt werden, dass die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese irrtümlich abzulehnen (Fehler 1. Art) einen bestimmten Wert nicht überschreitet.
Ein vorgegebener maximaler Fehler 1. Art heißt Signifikanzniveau α. Das Signifikanzniveau legt somit den Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese fest

1. Der linksseitige Signifikanztest

Ein Test heißt linksseitiger Signifikanztest, wenn der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ links *v*om Annahmebereich A liegt, d.h. es gilt:

$$\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots ; k\} \qquad A = \{k+1; k+2; \ldots ; n\}$$

(Man vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit abgenommen hat!)

Beispiel:
Ein Losbudenbesitzer behauptet, dass jedes zweite Los gewinnt. Ein Kontrolleur bezweifelt dies und überprüft anhand einer Stichprobe von 20 Losen diese Behauptung.
Wie muss die Entscheidungsregel des Kontrolleurs lauten, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art maximal 5% beträgt?

Testgröße X:	Anzahl der Lose mit Gewinn $(n = 20)$	
Nullhypothese:	$p = 0{,}5$	$A = \{k+1; \ldots ; 20\}$
Gegenhypothese:	$p < 0{,}5$	$\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots ; k\}$ linksseitiger Signifikanztest
Signifikanzniveau:	$\alpha = 0{,}05$	
Ablehnungsbereich:	$P_{0,5}^{20}(X \le k) < 0{,}05 \;\Rightarrow\; k = 5$	
Annahmebereich:	$A = \{6; 7; \ldots ; 20\}$	

2. Der rechtsseitige Signifikanztest

Ein Test heißt rechtsseitiger Signifikanztest, wenn der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ rechts vom Annahmebereich A liegt, d.h. es gilt:

$$A = \{0; 1; 2; \ldots ; k\} \qquad \overline{A} = \{k+1; k+2; \ldots ; n\}$$

(Man vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit zugenommen hat!)

Beispiel:
Ein Kekshersteller garantiert, dass nur 2% seiner Kekse beschädigt sind. Aufgrund von Reklamationen entsteht der Verdacht, dass der Anteil an zerbrochenen Keksen höher ist. Daraufhin entnimmt die Firma der Produktion 200 Kekse und führt einen Signifikanztest durch. Bestimmen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5% den größtmöglichen Annahme- und Ablehnungsbereich.

Testgröße X:	Anzahl der zerbrochenen Kekse $(n = 200)$	
Nullhypothese:	$p = 0{,}02$	$A = \{0; 1; 2; \ldots ; k\}$

Gegenhypothese: $p > 0{,}02$ $\quad \overline{A} = \{k+1; \ldots ; 200\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

Ablehnungsbereich:
$$P_{0,02}^{200}(X \geq k+1) < 0{,}05$$
$$1 - P_{0,02}^{200}(X \leq k) < 0{,}05$$
$$P_{0,02}^{200}(X \leq k) > 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad k = 7$$

Annahmebereich: $A = \{0; 1; \ldots ; 7\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{8; 9 : \ldots ; 200\}$

Aufgaben:

4. Frau Holle hat die Meldung „75% aller Frauen machen wieder Handarbeiten“ auf die Idee gebracht, ein Wollgeschäft zu eröffnen. Da sie kein Risiko eingehen will, beschließt sie, zunächst eine Umfrage zu starten, um sich über den Wahrheitsgehalt der Meldung im klaren zu sein. Sie will 100 Frauen befragen, ob sie handarbeiten, und sich nur dann für die Eröffnung eines Ladens zu entscheiden, wenn mindestens 70 Frauen dies bejahen.

a) Geben Sie die Testgröße, die Nullhypothese, die Gegenhypothese sowie deren Annahme- und Ablehnungsbereich an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit eröffnet sie das Geschäft nicht, obwohl die Meldung der Wahrheit entspricht?

c) Wie muss die Entscheidungsregel verändert werden, damit die Wahrscheinlichkeit, das Geschäft trotz wahrer Meldung nicht zu eröffnen, maximal 5% ist?

5. Ein Papierfabrikant bietet der Fachoberschule Weißenburg zu einem günstigen Pauschalpreis ein umfangreiches Sortiment an liniertem und kariertem Schulaufgabenpapier aus Restbeständen an. Die Schule ist interessiert, falls der Anteil des karierten Papiers ein Fünftel der Gesamtmenge beträgt. Dies wird vom Fabrikanten zugesagt. Trotzdem macht der Hausmeister die Annahme des Papiers von einer Stichprobe aus 20 Packungen abhängig. Die Lieferung darf von der Schule zurückgewiesen werden, wenn in der Stichprobe mindestens 5 karierte Packungen sind.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Schule ein vereinbarungsgemäßes Angebot ablehnt?

b) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit die Wahrscheinlichkeit, ein vereinbarungsgemäßes Angebot abzulehnen, maximal 1% ist?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in der Stichprobe gleich viel liniertes und kariertes Papier enthalten?

6. Ein Lehrer behauptet, dass der Schüler Ferdinand Faul mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% fehlt. Der Klassenleiter glaubt sogar, dass die Absenzenwahrscheinlichkeit des Schülers noch größer ist. Er will diesen Wert nur dann als richtig annehmen, wenn er bei der Überprüfung der nächsten 200 Unterrichtsstunden höchstens 44 Fehlstunden feststellt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Klassenleiter eine Fehlentscheidung?

b) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5% beträgt?

2006 SI

4.0 Der Torwart der Mannschaft A kann von 10 Elfmetern durchschnittlich 3 abwehren.

4.1 Es gibt 8 Elfmeter auf das Tor der Mannschaft A. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei höchstens 3 Tore fallen.

4.2 Der Ersatztorwart behauptet, dass er mehr Elfmeterschüsse abwehren kann (Gegenhypothese). Der Trainer beschließt einen Test mit dem Ersatztorwart bei 100 Elfmeterschüssen.
Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und berechnen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Trainerentscheidung legt der Test nahe, wenn der Ersatztorwart 35 Elfmeter abwehren kann?

2005 SI

6. Auf vielfache Nachfrage bietet das Parkrestaurant mehr fleischlose Gerichte an als früher. Durch einen Test soll herausgefunden werden, ob sich dadurch der Anteil der verkauften fleischlosen Gerichte gegenüber bisher 30% erhöht hat (Gegenhypothese). Hierzu werden die Essensbestellungen von 200 zufällig ausgewählten Gästen ausgewertet.
Geben Sie die Testgröße T und die Nullhypothese H_0 an. Bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Entscheiden Sie aufgrund dieses Tests ob die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn 71 fleischlose Gerichte bestellt werden.

2004 SI

3.0 Die Maschine wird nun durch neu entwickelte Teile so verbessert, dass der Anteil der fehlerhaften Gehäuse auf weniger als 10 % gesenkt werden kann (Gegenhypothese). Zur Überprüfung der Fertigungsqualität der verbesserten Maschine wird ein Signifikanztest der Länge 200 auf dem 2%-Niveau durchgeführt.

3.1 Geben Sie für diesen Signifikanztest die Testgröße (in Worten) sowie die Nullhypothese und die Art des Tests an. Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

3.2 Erläutern Sie kurz, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht.

2004 SII

3 Die Automobilfirma bezieht die Türverkleidungen von einem Zulieferbetrieb. Der Liefervertrag sieht vor, dass bei 2% der Verkleidungen kleinere Farbunregelmäßigkeiten auftreten dürfen. Man vermutet, dass dieser Wert überschritten wird (Gegenhypothese). Deshalb werden 200 Verkleidungen untersucht. Geben Sie für diesen Test die Testgröße und die Art des Tests an. Berechnen Sie ferner den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 5 %.

2000 SI

3.0 Eine Keksfabrik stellt auch Vanillekipferl her. Dieses leicht zerbrechliche Gebäck wird automatisch in Schachteln zu je 20 Stück verpackt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei ein zunächst unbeschädigtes Kipferl zum „Bruchkipferl" wird, beträgt erfahrungsgemäß 0,02. Dieser Wert wird von der Firma in Kauf genommen.

3.2 Aufgrund von Reklamationen entsteht der Verdacht, dass der Anteil der Bruchkipferln über 2% liegt (Gegenhypothese). Daraufhin führt die Firma vor Ort einen Signifikanztest durch. Hierbei werden 10 frisch verpackte Schachteln vorsichtig wieder geöffnet und jedes Kipferl einzeln kontrolliert. Geben Sie die Testgröße sowie die Art des Signifikanztests an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 1%-Niveau.

2000 SII

5.0 Eine Firma stellt Porzellanbecher her. Es wird davon ausgegangen, dass 4% aller produzierten Becher schadhaft sind. Aufgrund einer Häufung von Reklamationen entsteht der Verdacht, dieser Anteil könnte höher liegen als erwartet (Gegenhypothese). Zur Überprüfung wird seitens der Firma ein Signifikanztest mit 100 Bechern durchgeführt.

5.1 Bestimmen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5 % den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Geben Sie den bei diesem Test auftretenden Fehler 1. Art auf drei Nachkommastellen gerundet an.

5.2 Erklären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler 2. Art versteht. Wie verändert sich dieser Fehler, wenn die Entscheidungsregel so abgewandelt wird, dass sich der Fehler 1. Art verkleinert?

2007 BII

2 Auf Grund langjähriger Beobachtungen weiß man, dass 4% der Fahrgäste, welche die U–Bahn einer Großstadt benutzen, keinen gültigen Fahrausweis besitzen, also „schwarz" fahren.

2.1 Ermitteln Sie mit Hilfe der Normalverteilung als Näherung, wie viele Fahrgäste von den Kontrolleuren mindestens überprüft werden müssen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens 50 Fahrgäste ohne Fahrausweis ertappen. Begründen Sie, dass die Näherung mit Hilfe der Normalverteilung sinnvoll war.

2.2 Die schlechte wirtschaftliche Lage vieler Bewohner der Großstadt lässt den Verdacht aufkommen, dass der Prozentsatz der Schwarzfahrer gestiegen ist. Um diese Vermutung zu überprüfen, wird ein Signifikanztest durchgeführt, wobei 500 zufällig ausgewählte Fahrgäste kontrolliert werden sollen.

2.2.1 Ermitteln Sie für die Nullhypothese „Höchstens 4% der Fahrgäste sind Schwarzfahrer" den Annahme- und den Ablehnungsbereich auf dem Signifikanzniveau von 5%.

2.2.2 Bestimmen Sie, wie groß bei diesem Test mit den in Aufgabe 2.2.1 ermittelten Bereichen die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl der tatsächliche Anteil der Schwarzfahrer auf 6% gestiegen ist. Wie kann diese Irrtumswahrscheinlichkeit verringert werden?

2.3 Kontrolleur Adlerauge glaubt, dass sich am Monatsende der Prozentsatz der Schwarzfahrer auf 10% erhöht. Diese Hypothese soll bei 200 kontrollierten Fahrgästen am Monatsende überprüft werden. Ermitteln Sie den kleinsten Annahmebereich für diese Hypothese, wenn die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich am niedrigeren Schwarzfahreranteil festzuhalten, höchstens 0,30 betragen soll.

Berechnen Sie für diesen Annahmebereich die Wahrscheinlichkeit, sich irrtümlich für die Erhöhung zu entscheiden.

2.4 In einer anderen Großstadt haben 70% der Fahrgäste der U–Bahn ihren Wohnsitz in der Stadt. Umfangreiche Kontrollen ergaben einen Schwarzfahreranteil von 5,4%, wobei durchschnittlich zwei von neun Schwarzfahrern Auswärtige sind.
Berechnen Sie den Prozentsatz der Schwarzfahrer unter den Stadtbewohnern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast in der Stadt wohnt und einen gültigen Fahrausweis besitzt?

2006 BI

2 Für das Turnier werden Fußbälle benötigt, die besonders strenge Anforderungen erfüllen müssen, so muss z.B. die Masse zwischen 415 g und 435 g betragen.
Ein Hersteller produziert Fußbälle, deren Masse annähernd normalverteilt ist mit dem Mittelwert 425 g.

2.1 Wie groß darf die Standardabweichung der Masse höchstens sein, damit der Hersteller höchstens 10% Ausschuss erhält?

2.2 Um die Aussage des Herstellers, dass die Produktion höchstens 10% Ausschuss enthält, zu überprüfen, wird zunächst eine Lieferung von 30 Fußbällen angefordert. Beschreiben Sie einen Signifikanztest mit dem Niveau 2,5%, wobei die Nullhypothese die Aussage des Herstellers ist. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

2.3 Für das Turnier werden 600 einwandfreie Bälle benötigt. Berechnen Sie, wie viele Bälle man bei einer Ausschusswahrscheinlichkeit von 10% mindestens bestellen muss, damit mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit genügend viele Bälle zur Verfügung stehen.

2004 BII

2 Die Firma „Compucheap“ stellt u.a. sehr preisgünstige Disketten her. Nach ihrer Garantie sind davon (höchstens) 6% fehlerhaft.
Die Disketten werden auch im Supermarkt XY angeboten. Dem Leiter der Computerabteilung von XY kommen im Laufe der Zeit Zweifel, ob die Herstellergarantie wirklich stimmt. Seiner Meinung nach sind mindestens 10% der Disketten unbrauchbar.
Um eine Entscheidung herbeizuführen, wird ein Test durchgeführt. Dabei werden einer sehr großen Lieferung 200 Disketten entnommen und auf ihre Tauglichkeit hin überprüft. Werden dabei mehr als 16 fehlerhafte entdeckt, will der Supermarkt die Lieferung nicht annehmen.

2.1 Berechnen Sie (unter Angabe der üblichen Kenngrößen) jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) der Supermarkt die Lieferung annimmt, obwohl in Wirklichkeit die Vermutung des Abteilungsleiters stimmt.
b) Compucheap die Ware zurücknehmen muss, obwohl ihre Angaben der Wahrheit entsprechen.

2.2 Eine große Firma benötigt kurzfristig mindestens 5000 völlig einwandfreie Billigdisketten, möchte aber nicht unnötig viele davon bestellen. Die Firma setzt voraus, dass die genannte Herstellergarantie stimmt.
Berechnen Sie, wie viele Disketten man mindestens bestellen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 5000 brauchbare zu erhalten, wenigstens 99 % beträgt.

12.3 Der zweiseitige Signifikanztest

Ein Test heißt zweiseitiger Signifikanztest, wenn der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ sowohl links als auch rechts vom Annahmebereich A liegt, d.h. es gilt:

$$\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; k_1 - 1\} \cup \{k_2 + 1; k_2 + 2; \ldots; n\} \qquad A = \{k_1; k_1 + 1; \ldots; k_2\}$$

(Man vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit entweder abgenommen oder zugenommen hat!)

<u>Beispiel:</u>
Ein Lieferant für Bio-Kartoffeln teilt seinem Abnehmer mit, der Virusbefall der Kartoffeln sei 20%. Er vereinbart mit dem Käufer einen Preisnachlass, falls sich der Virusbefall bei einem Test deutlich größer als 20% herausstellen sollte und einen Preisaufschlag, wenn das Testergebnis für einen kleineren Anteil als 20% spricht. Beide kommen überein, 50 Kartoffeln untersuchen zu lassen. Der Lieferant ist bereit, ein Risiko bis maximal 10% einzugehen, vom vereinbarten Normalpreis abweichen zu müssen. Welcher Bereich eignet sich für die Annahme der Nullhypothese $p = 0{,}2$?

Man wird die Nullhypothese für zu „kleine" oder zu „große" Werte der Testgröße X ablehnen. Es ist daher sinnvoll, den Ablehnungsbereich auf beiden Seiten des Annahmebereichs zu verteilen. Die Abgrenzung kann so erfolgen, dass die beiden Risiken für einen Preisaufschlag und einen Preisnachlass in etwa gleich groß sind, also je höchstens 5%.

Testgröße X: Anzahl der virusbefallenen Kartoffeln $(n = 50)$

Nullhypothese: $p = 0{,}2$ $\quad A = \{k_1; k_1 + 1; \ldots; k_2\}$

Gegenhypothese: $p \neq 0{,}2$ $\quad \overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; k_1 - 1\} \cup \{k_2 + 1; k_2 + 2; \ldots; n\}$

zweiseitiger Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}1$

Ablehnungsbereich:

$$P_{0,2}^{50}(X < k_1) < 0{,}05 \qquad P_{0,2}^{50}(X > k_2) < 0{,}05$$
$$P_{0,2}^{50}(X \leq k_1 - 1) < 0{,}05 \qquad 1 - P_{0,2}^{50}(X \leq k_2) < 0{,}05$$
$$k_1 - 1 = 5 \qquad P_{0,2}^{50}(X \leq k_2) > 0{,}95$$
$$k_1 = 6 \qquad k_2 = 15$$

$$\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; 5\} \cup \{16; 17; \ldots; 50\}$$

Annahmebereich: $A = \{6; 7; \ldots; 15\}$

Risiko 1. Art:

$$\alpha = P_{0,2}^{50}(X \leq 5) + P_{0,2}^{50}(X \geq 16)$$
$$\alpha = P_{0,2}^{50}(X \leq 5) + 1 - P_{0,2}^{50}(X \leq 15)$$
$$\alpha = 0{,}04803 + 1 - 0{,}96920$$
$$\alpha = 0{,}07883$$
$$\alpha \approx 7{,}9\%$$

Aufgaben:

7. Das Testverfahren für Mediziner bestehen erfahrungsgemäß $\frac{1}{6}$ der Studienplatzanwärter. In einer bayerischen Gegend aus der sich 120 junge Leute bewerben soll untersucht werden, ob die Wahrscheinlichkeit zum bestehen des Tests vom Landesdurchschnitt abweicht. Wie muss die Entscheidungsregel lauten, so dass man auf einem Signifikanzniveau von 5% von einer Abweichung sprechen kann?
8. Die Kaufhausdetektive eines großen Geschäftes hatten bisher eine Diebstahlerfassungsquote von 5%. Der Geschäftsinhaber hat eine teure Kameraüberwachungsanlage installieren lassen und will nun untersuchen, ob sich damit die Diebstahlerfassungsquote ändert. Geben Sie für einen zweiseitigen Test vom Umfang 300 den Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 10% Signifikanzniveau an. Was bedeutet ein Testergebnis von 10 Dieben, was ein Testergebnis von 24 Dieben?

2007 BI

3 Der Besitzer des Getränkemarktes vermutet, dass ziemlich genau 35% der Kunden Bier von der Brauerei B bevorzugen. Die Angestellten bezweifeln diesen Prozentsatz.

3.1 Die Behauptung H_0 des Besitzers soll auf dem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese in einem zweiseitigen Test bei einer Befragung von 256 Kunden.

3.2 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit man der Behauptung des Besitzers zustimmen wird bei einem Annahmebereich von $A = \{75; ...; 105\}$ der Nullhypothese, obwohl in Wirklichkeit 45% der Kunden Bier von der Brauerei B bevorzugen.

2006 BII

3 Ein Limonadenhersteller behauptet, er hätte bei jeder zwanzigsten Flasche derselben Sorte eine Gewinnnummer auf der Innenseite der Flaschendeckel anbringen lassen, welche den Käufer bei Vorlage dieses Deckels zur Abholung eines attraktiven Sachgewinns berechtigt.

3.1 Um die Aussage des Herstellers mit Hilfe eines einseitigen Hypothesentests zu überprüfen, beschließt eine Gruppe von Verbraucherschützern, 200 derartige Flaschen zu untersuchen. Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese für diesen Test an und ermitteln Sie auf einem Signifikanzniveau von 1% den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

3.2 Aufgrund von Kundenreaktionen zweifelt der Limonadenhersteller an der Einhaltung der Gewinnwahrscheinlichkeit bei den zugelieferten Flaschendeckeln. Ermitteln Sie für eine Stichprobenlänge von 300 Flaschendeckeln für einen zweiseitigen Test einen möglichst großen zum Erwartungswert symmetrischen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese $p = 0{,}05$ auf einem Signifikanzniveau von 4%.

2003 BI

2 Ein Spielautomat liefert nach dem Zufallsprinzip voneinander unabhängig eine der drei Zahlen –2, 0 und 2. Die Zahl -2 taucht mit der Wahrscheinlichkeit 0,5, die Zahl 2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 und folglich die Zahl 0 mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 auf.

Bei einem Spiel werden auf Knopfdruck drei der obigen Zahlen vom Automaten nacheinander ausgewählt und ihre Summe angezeigt.

2.1 Die Zufallsgröße X beschreibt die vom Automaten nach einem Spiel angezeigte Summe. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Werte der Zufallsgröße X eintreten, lassen sich mit den Parametern a, b und c $\in$ IR wie folgt darstellen.

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$P(X=x)$	0,125	0,075	c	a	0,252	b	0,064

Berechnen Sie die Parameter a, b und c und stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten in einem Histogramm dar (vertikale Achse: 0,1 LE = 2cm). (Teilergebnis: a = 0,121; b = 0,048)

2.2 Ermitteln Sie den Erwartungswert E(X) und die Standardabweichung σ(X) und kennzeichnen Sie Ihre Ergebnisse in der graphischen Darstellung aus Teilaufgabe 2.1.

2.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A: Bei drei Spielen erscheint an der Anzeige wenigstens einmal die „Summe 2“.
B: Bei 5 Spielen erscheint genau zweimal die „Summe > 0“ .

2.4.1 Es besteht der Verdacht, dass sich die „Summe 0“ nicht auf die Nullhypothese $P(X=0)=0{,}121$ sondern auf einen neuen Wert eingependelt hat. Die Überprüfung dieses Sachverhaltes soll in 800 Durchgängen erfolgen. Beschreiben Sie einen geeigneten Hypothesentest bei einem Signifikanzniveau von 5% und bestimmen Sie den Ablehnungsbereich.

2.5 Berechnen Sie den Fehler 2. Art, wenn die „Summe 0“ tatsächlich mit der Wahrscheinlichkeit von 0,15 auftritt.

2002 BI

1 In einer medizinischen Studie wurde festgestellt, dass bei zwei Drittel der untersuchten krawattentragenden, männlichen Versuchspersonen der Hemdenkragen zu eng war. Dies gefährdet nach Erkenntnissen der Ärzte den Blutzufluss zum Gehirn und zu den Sinnesorganen und mindert die Konzentrations- und Reaktionsfähigkeit.

1.1 Die angegebene relative Häufigkeit von $\frac{2}{3}$ soll bei 100 Krawattenträgern in einem zweiseitigen Signifikanztest überprüft werden. Geben Sie die Testgröße an, und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 5 %.

1.2 Außerdem soll in einem einseitigen Signifikanztest an 500 Personen überprüft werden, ob bei einem zu engen Kragen die Bearbeitungsdauer von 50 Rechenaufgaben um mindestens 10 Sekunden länger ist als bei offenem Kragen. Geben Sie für die Nullhypothese $p \le 0{,}5$ die Testgröße und die Gegenhypothese an, und ermitteln Sie einen möglichst großen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 2 %.

1999 BI

2.5 Der Vertriebsleiter der Fahrradfirma behauptet, dass Mountainbikes einen Marktanteil von 60% haben. Um diese Behauptung bei einem zweiseitigen Hypothesentest der Länge 500 zu testen, wird festgestellt, wie viele der in einem großen Fahrradgeschäft verkauften Räder zum Typ Mountainbike gehören. Geben Sie die Nullhypothese und die Gegenhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5% an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese.