§ 10 Statistik

10.1 Wahrscheinlichkeitsfunktion und optische Darstellung

Bei der Auswertung von Zufallsexperimenten ist oft gar nicht das einzelne Ergebnis von Interesse, sondern vielmehr eine Zahlengröße (Zufallsgröße X), die das Ergebnis des Experiments der Fragestellung entsprechend charakterisiert.

Bsp. 1: "Werfen zweier Würfel"

Ergebnisraum: $\{(1;1),(1;2),(1;3),...\}$ — Definitionsmenge

$\downarrow$ X : Augensumme ($\hat{=}$ Zufallsgröße) — $\downarrow$ Funktion

Zufallswert: $\{2;3;4;...;11;12\}$ — Wertemenge

Schreibweise: $P(X=x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsgröße X den Zufallswert x annimmt.

Die zu den Zufallswerten x gehörigen Wahrscheinlichkeiten fasst man in einer Tabelle zusammen:

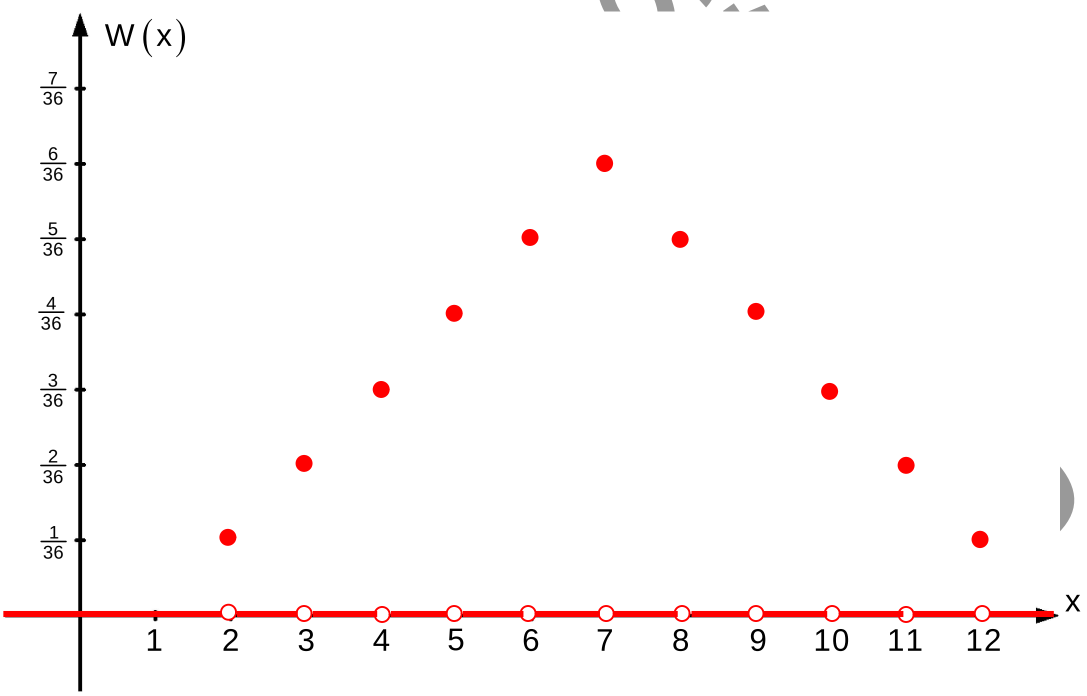
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Durch diese Wertetabelle lässt sich auf ganz $\mathbb{R}$ eine Funktion W definieren, nämlich:

$$W : x \mapsto P(X=x) \quad \text{mit } \mathbb{D}_W = \mathbb{R},$$

deren Wertemenge dem Intervall $[0;1]$ angehört.

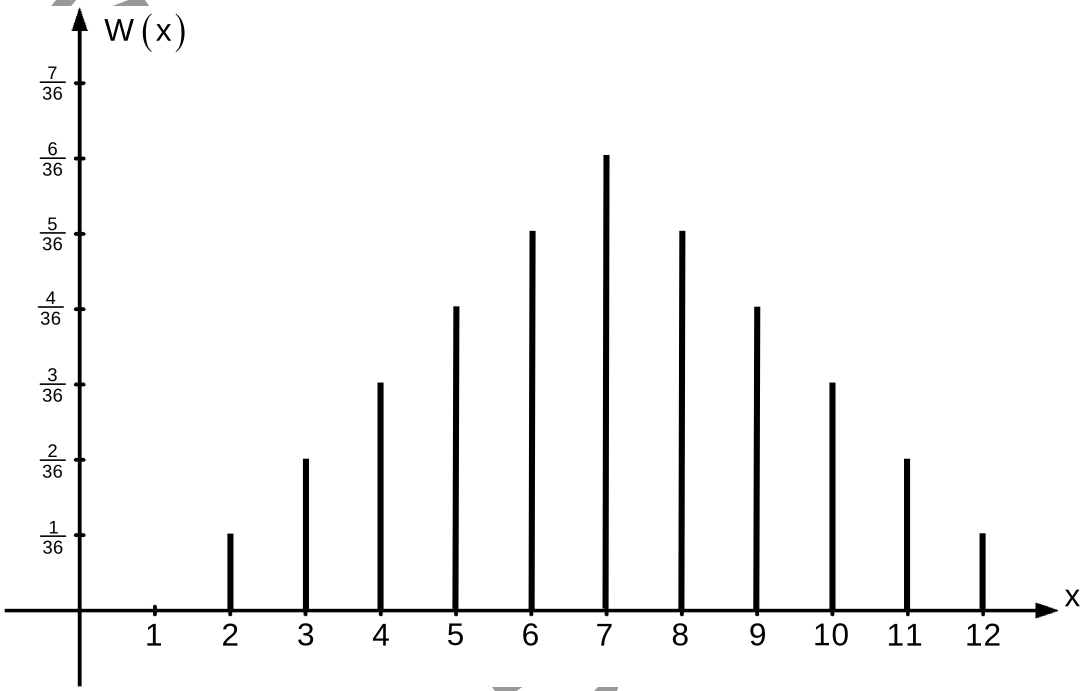
Diese Funktion heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion W der Zufallsgröße X.



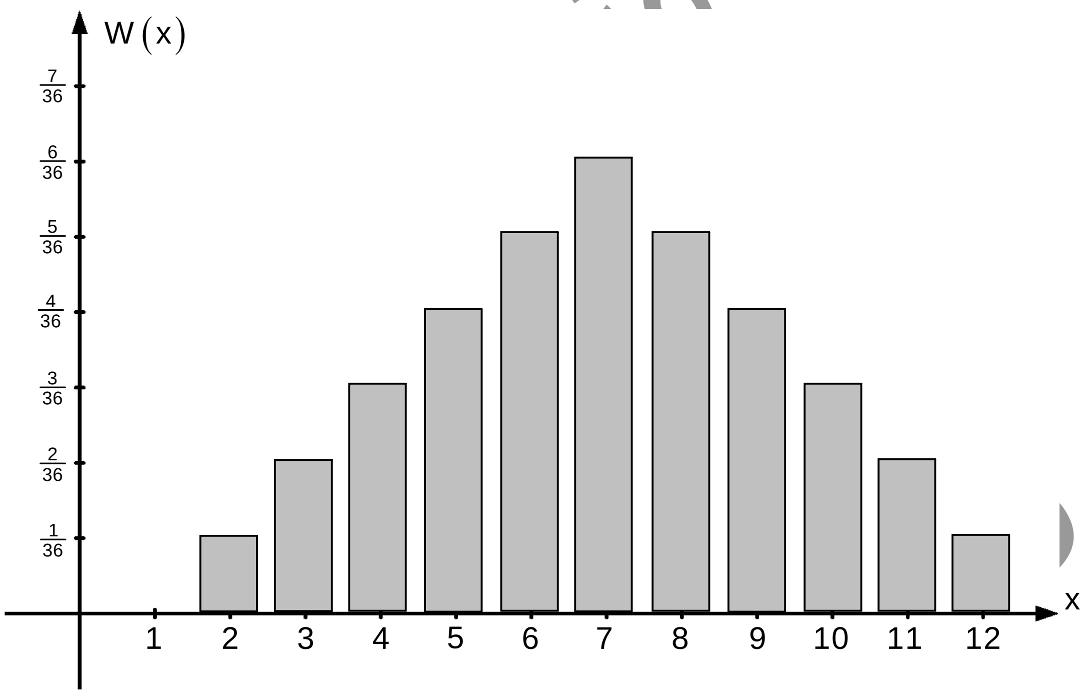
Die so definierte Wahrscheinlichkeitsfunktion W hat meist den Wert 0, weil für alle x, die nicht als Werte der Zufallsgröße X auftreten, $W(x) = 0$ ist.

Man nennt W auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.
Da der Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion optisch recht dürftig ist, wählt man in der Praxis andere Arten der Veranschaulichung:

Stabdiagramm:



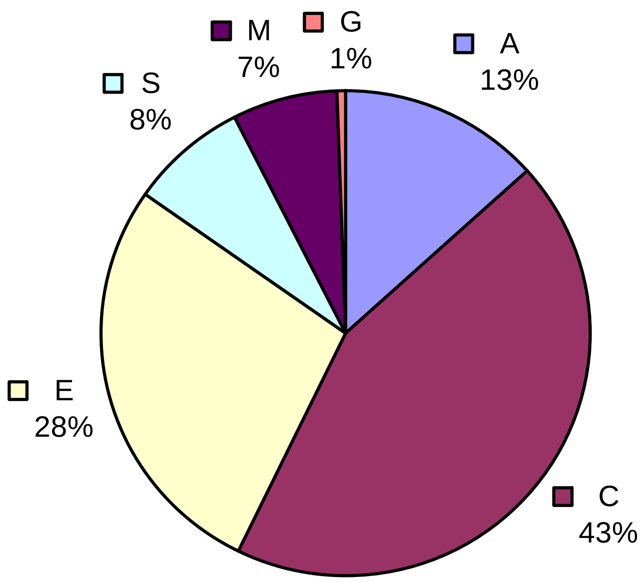
Säulendiagramm (Histogramm):



Verkaufszahlen von Mercedes Benz im Jahr 2004:

	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit	
Klasse	Anzahl der verkauften Autos	Proz. Anteil	Sektorwinkel im Kreisdiagramm
A	144.400	0,134	48°
C	472.300	0,438	158°
E	297.400	0,276	99°
S	84.600	0,078	28°
M	74.000	0,068	25°
G	6.100	0,006	2°
Gesamt	1.078.800	1	360°

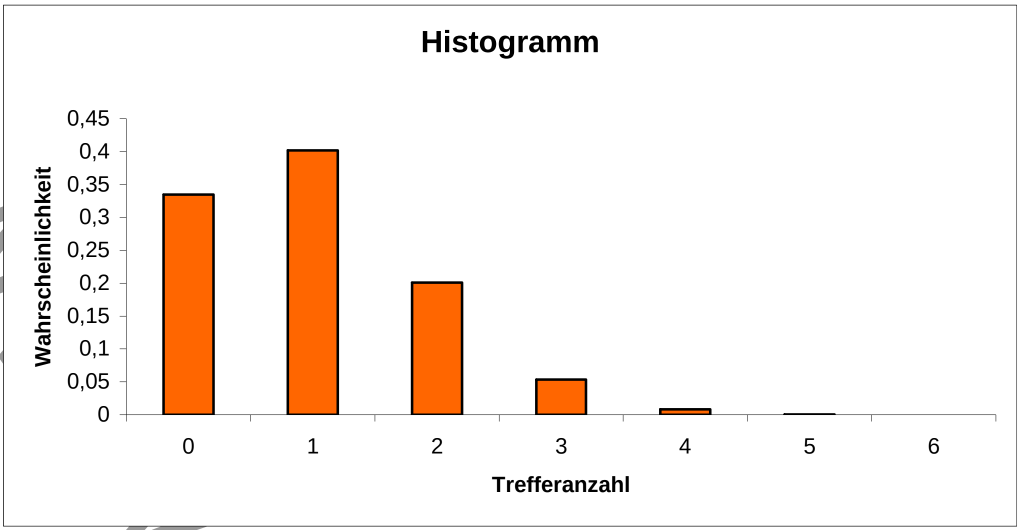
Kreisdiagramm



Andere Beispiele durch Zahlenmaterial der Schüler.

Wir betrachten nun das Zufallsexperiment: „6-maliges Werfen eines Würfels“. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der geworfenen 6 an.
Die zu den Zufallswerten x gehörigen Wahrscheinlichkeiten fassen wir nun in einer Tabelle zusammen:

Zufallswerte x	0	1	2	3	4	5	6
$W(x)=P^{6}_{\frac{1}{6}}(X=x)$	0,33490	0,40188	0,20094	0,05358	0,00804	0,00064	0,00002
$F(x)=P^{6}_{\frac{1}{6}}(X\leq x)$	0,33490	0,73678	0,93771	0,99130	0,99934	0,99998	1



10.2 Kumulative Verteilungsfunktion

Bisher haben wir uns damit beschäftigt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein bestimmter Zufallswert x eintritt.
Ebenso kann man danach fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Zufallsgröße X einen Wert kleiner oder gleich einem bestimmten Zufallswert x annimmt.
Auf unser Beispiel bezogen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der geworfenen 6-er höchstens 2 ist. Also:

$$P_{\frac{1}{6}}^{6}(X \le 2) = P_{\frac{1}{6}}^{6}(X = 0) + P_{\frac{1}{6}}^{6}(X = 1) + P_{\frac{1}{6}}^{6}(X = 2) = 0{,}93771$$

Führt man das für jede mögliche Anzahl der geworfenen 6-er durch, so kann man die Wertetabelle etwas erweitern (siehe oben!).

Definition: Die Funktion F, die jeder reellen Zahl nach der Vorschrift

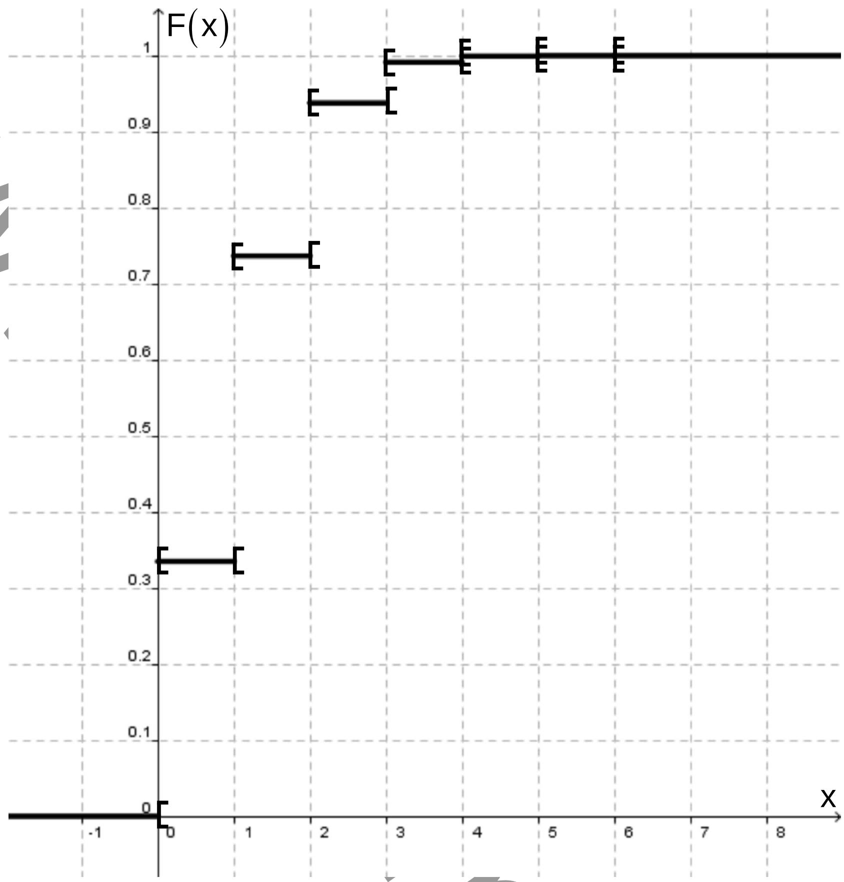
$$F : x \mapsto F(x) = P(X \le x)$$

genau eine reelle Zahl $F(x)$ als Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X.

Die vollständige Wertetabelle für die Verteilungsfunktion lautet dann:

Zufallswerte x	$]-\infty;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;\infty[$
$F(x) = P_{\frac{1}{6}}^{6}(X \le x)$	0	0,33490	0,73678	0,93771	0,99130	0,99934	0,99998	1

Und der Graph der kumulativen Verteilungsfunktion sieht dann so aus.



10.3 Erwartungswert

Wie viele Treffer erwartet man eigentlich, wenn man obiges Zufallsexperiment durchführt?

Definition: Sei X eine Zufallsgröße, die ihre Zufallswerte $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $W(x_1), W(x_2), W(x_3), ..., W(x_n)$ annimmt, dann heißt:

$$\boxed{\mu = E(X) = x_1 \cdot W(x_1) + x_2 \cdot W(x_2) + x_3 \cdot W(x_3) + ... + x_n \cdot W(x_n)}$$

der <u>Erwartungswert</u> der Zufallsgröße X.

Zufallswerte x	0	1	2	3	4	5	6
$W(x) = P^6_{\frac{1}{6}}(X = x)$	0,33490	0,40188	0,20094	0,05358	0,00804	0,00064	0,00002

$$\mu = E(X) = 0 \cdot 0{,}33490 + 1 \cdot 0{,}40188 + 2 \cdot 0{,}20094 + 3 \cdot 0{,}05358 + 4 \cdot 0{,}00804 +$$
$$+ 5 \cdot 0{,}00064 + 6 \cdot 0{,}00002 = 0{,}99998 \approx 1 \left(\text{von Rundungsfehlern abgesehen}\right)$$

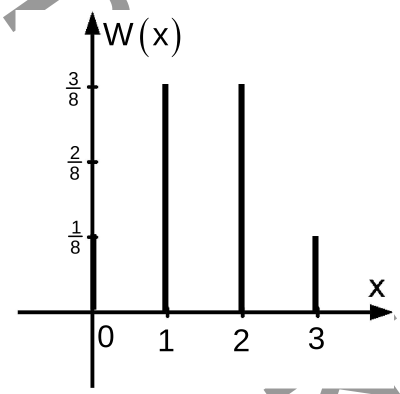
Der Erwartungswert $\mu = E(X) = 1$ sagt nun aus, dass man 1nen Treffer erwartet.

Bsp. 1: Eine Münze wird dreimal geworfen. Zufallsgröße sei jeweils die Anzahl von „W". Erstellen Sie die Wertetabelle, zeichnen Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion und berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße.

Wertetabelle:

x	0	1	2	3
$W(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion



Bsp 2: In einer Lostrommel befinden sich 4 rote und 6 weiße Kugeln, von denen 5 Stück mit Zurücklegen gezogen werden. Zufallsgröße sei die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln. Erstellen Sie die Wertetabelle, zeichnen Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion und berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße.

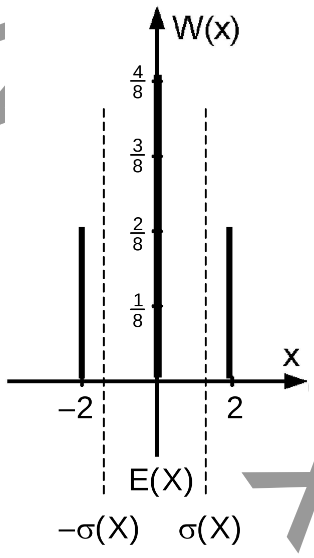
x	0	1	2	3	4	5
$W(x)$	0,01024	0,07680	0,23040	0,34560	0,25920	0,07776

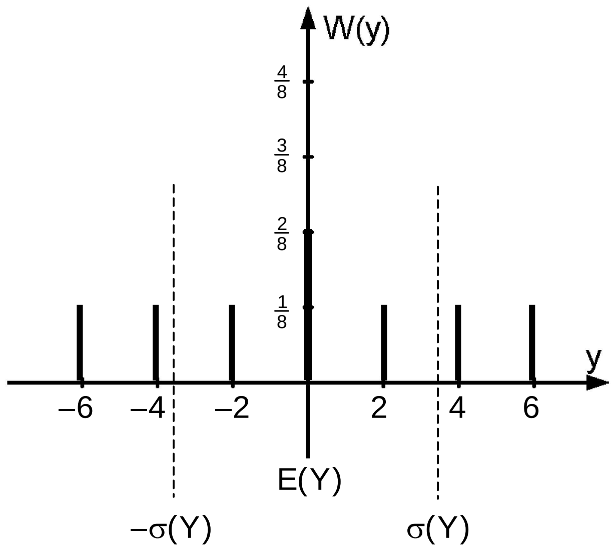
10.4 Varianz und Standardabweichung

Seien X und Y Zufallsgrößen mit folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

x	-2	0	2
W(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

y	-6	-4	-2	0	2	4	6
W(y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$





Für die beiden Erwartungswerte gilt: $E(X) = 0 = E(Y)$

Obwohl beide Wahrscheinlichkeitsverteilungen denselben Erwartungswert haben unterscheiden sich die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen wesentlich.
Die Werte der Zufallsgröße Y schwanken stärker als die von X.
Man sagt: Y besitzt eine größere Streuung um den Erwartungswert als X.

E(X) hat den Charakter eines mittleren Wertes um den die Werte der Zufallsgröße streuen. Durch diese "Raffung" geht aber Information über die Bandbreite der Zufallsgröße X verloren. Ein Information über die Streuung der Werte um den Erwartungswert liefert die Standardabweichung

Ein Information über die Streuung der Werte um den Erwartungswert liefert die Varianz bzw. die Standardabweichung.

Definition: (Varianz)
Sei X eine Zufallsgröße, die ihre Zufallswerte $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $W(x_1), W(x_2), W(x_3), ..., W(x_n)$ annimmt und sei $E(X) = \mu$ der Erwartungswert der Zufallsgröße, dann heißt

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot W(x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot W(x_2) + ... + (x_n - \mu)^2 \cdot W(x_n)}$$

die Varianz von X. Sie wird auch mittlere quadratische Abweichung genannt und mit $\sigma^2(X)$ bezeichnet.

Da die Maßeinheit für die Varianz das Quadrat der Einheit ist, in der die Zufallsgröße X gemessen wird, empfiehlt sich daher folgende

<u>Definition</u>: (Standardabweichung)
Als Standardabweichung (auch Streuung) der Zufallsgröße X bezeichnet man die Zahl

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}}$$

Sie wird auch mittlere Abweichung genannt.

Die meisten Werte der Zufallsgröße X liegen innerhalb der Standardabweichung um den Erwartungswert, d.h. im Intervall $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$

$Var(X) = ... = 2 \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{2} \approx 1{,}4$

$Var(Y) = ... = 14 \Rightarrow \sigma(Y) = \sqrt{14} \approx 3{,}7$

$\rightarrow$ in die Wahrscheinlichkeitsverteilung eintragen

Um die Varianz eines Zufallsexperiments zu ermitteln gibt es aber auch eine etwas einfachere Berechnungsmöglichkeit. Die sogenannte

<u>Verschiebungsformel</u>
Die Varianz lässt sich oft einfacher mit der Verschiebungsformel berechnen. Es gilt:

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2} \qquad \text{mit } \mu = E(X)$$

Beweis: Man geht von der Definition der Varianz aus und formt etwas um.

$$\mathrm{Var}(X) = (x_1-\mu)^2 \cdot W(x_1) + (x_2-\mu)^2 \cdot W(x_2) + \ldots + (x_n-\mu)^2 \cdot W(x_n)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k-\mu)^2 \cdot W(x_k)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - 2x_k \cdot \mu + \mu^2\right) \cdot W(x_k)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot W(x_k) - \sum_{k=1}^{n} 2x_k \cdot \mu \cdot W(x_k) + \sum_{k=1}^{n} \mu^2 \cdot W(x_k)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot W(x_k)}_{=E(X^2)} - 2\mu \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot W(x_k)}_{=\mu} + \mu^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} W(x_k)}_{=1}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Bsp.: Gegeben ist folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	-2	0	2	4	5
W(x)	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

$$E(X) = -2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 = 2{,}6 = \mu$$
$$E(X^2) = (-2)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}4 = 14{,}4$$
$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 14{,}4 - 2{,}6^2 = 7{,}64$$
$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{7{,}64} \approx 2{,}76$$

10.5 Binomialverteilte Zufallsgrößen

Für binomialverteilte Zufallsgrößen ist die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz etwas einfacher.

Für den Erwartungswert gilt:

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Beweis: Man geht von der Definition des Erwartungswertes aus und formt etwas um.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot W(x_k)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot W(k)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_p^n(X = k)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{da für } k = 0 \text{ gilt: } \quad k \cdot P_p^n(X = k) = 0$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k+1)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$E(X) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-(k-1))!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$E(X) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{Nun erweitern wir mit } \frac{p}{p}$$

$$E(X) = n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k}$$

$$E(X) = n \cdot p \cdot \left[\binom{n-1}{0} \cdot p^0 \cdot q^{n-1} + \binom{n-1}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q^0 \right] \qquad \text{Setze}: m = n-1$$

$$E(X) = n \cdot p \cdot \left[\binom{m}{0} \cdot p^0 \cdot q^m + \binom{m}{1} \cdot p^1 \cdot q^{m-1} + \ldots + \binom{m}{n-1} \cdot p^m \cdot q^0 \right]$$

$$E(X) = n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot p^i \cdot q^{m-i}}_{=1}$$

$$E(X) = n \cdot p$$

Für die Varianz gilt:

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$$
$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Der Beweis ist sehr schwierig und rechenintensiv. Er wird deshalb hier nicht durchgeführt.

Bsp.: Eine Urne enthält 10 weiße und 20 schwarze Kugeln, von denen 6 Stück mit Zurücklegen gezogen werden. Zufallsgröße X sei die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

x	0	1	2	3	4	5	6
W(x)	$\frac{1}{729}$	$\frac{12}{729}$	$\frac{60}{729}$	$\frac{160}{729}$	$\frac{240}{729}$	$\frac{192}{729}$	$\frac{64}{729}$

Auf die herkömmliche Art:

$\mu = E(X) = ... = 4$

$E(X^2) = 17\frac{1}{3}$

$\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{3}$

$\sigma \approx 1{,}15$

Mittels obiger Beziehungen:

$\mu = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

$\sigma = \sqrt{6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man nun damit rechnen, dass die beim Experiment erhaltene Trefferzahl innerhalb der einfachen (zweifachen) Standardabweichung vom Erwartungswert liegt?

$$P(|x-\mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = P(4 - 1{,}15 < x < 4 + 1{,}15) =$$
$$= P(2{,}85 < x < 5{,}15) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) =$$
$$= \frac{160}{729} + \frac{240}{729} + \frac{192}{729} = \frac{592}{729} \approx 0{,}812 = 81{,}2\%$$

Das bedeutet, dass 81,2% aller auftretenden Werte eine Abweichung vom Erwartungswert haben, deren Betrag nicht größer als die Standardabweichung σ ist. (Größere Abweichungen sind also weniger wahrscheinlich)

$$P(|x-\mu| < 2\sigma) = P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(4 - 2 \cdot 1{,}15 < x < 4 + 2 \cdot 1{,}15) =$$
$$= P(1{,}7 < x < 6{,}3) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) =$$
$$= \frac{60}{729} + \frac{160}{729} + \frac{240}{729} + \frac{192}{729} + \frac{64}{729} = \frac{716}{729} \approx 0{,}982 = 98{,}2\%$$

Das bedeutet, dass 98,2% aller auftretenden Werte eine Abweichung vom Erwartungswert haben, deren Betrag nicht größer als die doppelte Standardabweichung σ ist.

10.6 Rechenregeln

Sei X eine Zufallsgröße, dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$$
$$Var(aX+b) = a^2 \cdot Var(X)$$

Beweis:

$$E(aX+b) = \sum_{k=0}^{n} (a \cdot x_i + b) \cdot W(x_i)$$

$$E(aX+b) = \sum_{k=0}^{n} (a \cdot x_i \cdot W(x_i) + b \cdot W(x_i))$$

$$E(aX+b) = \sum_{k=0}^{n} a \cdot x_i \cdot W(x_i) + \sum_{k=0}^{n} b \cdot W(x_i)$$

$$E(aX+b) = a \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x_i \cdot W(x_i)}_{=E(X)} + b \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} W(x_i)}_{=1}$$

$$E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$$

$$Var(aX+b) = \sum_{k=0}^{n} (ax_i + b - (a\mu + b))^2 \cdot W(x_i)$$

$$Var(aX+b) = \sum_{k=0}^{n} (ax_i + b - a\mu - b)^2 \cdot W(x_i)$$

$$Var(aX+b) = \sum_{k=0}^{n} (a \cdot (x_i - \mu))^2 \cdot W(x_i)$$

$$Var(aX+b) = a^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot W(x_i)}_{=Var(X)}$$

$$Var(aX+b) = a^2 \cdot Var(X)$$

Aus letzter Gleichung folgt dann:

$$\sigma(aX+b) = \sqrt{Var(aX+b)} = \sqrt{a^2 \cdot Var(X)} = |a| \cdot \sqrt{Var(X)} = |a| \cdot \sigma(X)$$

Aufgaben:

1. Eine Urne enthält 8 weiße und 4 schwarze Kugeln, von denen 3 Stück gezogen werden
   a) mit Zurücklegen.
   b) ohne Zurücklegen.
   Zufallsgröße sei jeweils die Anzahl der schwarzen Kugeln. Berechne für beide Fälle die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße. Gib die Wertetabelle und den Funktionsgraph an.

2. Es wird der Trainingsfleiß einer Eisläuferin untersucht. Zufallsgröße sei die Zahl der täglichen Trainingsstunden. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße ist durch folgende Wertetabelle gegeben:

x	0	0,5	1	1,5	2	Sonst
W(x)	0,25	0,25		0,1	0,1	0

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Trainingszeit von 1 Stunde täglich?
   b) Berechne die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße. Gib die Wertetabelle und den Funktionsgraph an.
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das höchstens, genau, mehr als 1 Stunde trainiert wird?
   d) Welche tägliche Trainingszeit erwartet man?
3. Bei einer Tombola enthält die Urne 1000 Lose. Es gewinnen 1 Los mit 500,-€, 4 Lose mit je 100,-€ und 5 Lose mit je 10,-€. Wie groß ist der durchschnittliche Verlust beim Kauf eines Loses um 1,-€?
   Zufallsgröße X sei der Reingewinn.

4. Bei einem Würfelspiel wird mit 2 Würfeln geworfen. Die Augensummen 2 oder 12 gewinnen das 10-fache der Augenzahl in €, die Augensummen 3 oder 11 gewinnen das 5-fache, die Augensummen 4 oder 10 gewinnen das 3-fache. Andernfalls erfolgt keine Gewinnzahlung. Wie groß ist der Erwartungswert des Gewinns? Welcher Einsatz wäre annehmbar?

5. Ein Lieferung geräucherter Forellen enthält 10 Stück, von denen bereits 4 Stück ungenießbar sind. Zur Prüfung entnimmt man nacheinander (ohne Zurücklegen) 3 Stück. Die Zufallsgröße sei jeweils die Anzahl der verdorbenen Fische. Bestimme und zeichne die Wahrscheinlichkeitsfunktion, die kumulative Verteilungsfunktion und berechen den Erwartungswert.

6. *Chuck-a-luck*
   Auf einem Rummelplatz wird in eine Glücksbude folgendes Spiel angeboten: Der Spieler leistet 1$ Einsatz, darf eine der Zahlen 1, 2,..., 6 nennen und dann 3 Würfel werfen. Zeigt mindestens einer der Würfel seine Zahl, so erhält er vom Budenbesitzer den Einsatz zurück und außerdem für jeden weiteren Würfel, der diese Zahl zeigt, noch zusätzlich 1$. Erscheint seine Zahl nicht, so verfällt der Einsatz.
   Die Zufallsgröße X sei der Gewinn bei diesem Glücksspiel. Berechnen Sie den Erwartungswert dieses Zufallsexperiments. Was sagt dieser aus?

2005 SI

4. Ein Achterbahnzug besitzt 40 Sitzplätze. Am Wochenende ist ein Sitzplatz mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 besetzt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der freien Plätze bei einer zufällig ausgewählten fahrt an.
Untersuchen Sie, ob der Wert $x = 6$ der Zufallsgröße X innerhalb der doppelten Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. (6 BE)

5.0 Bei entsprechenden, vom Zufall abhängigen Voraussetzungen wird die Öffnungszeit des Parks verlängert. Die Zufallsgröße Y gibt die Verlängerung der Öffnungszeiten in Stunden an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich mit Hilfe eines Parameters $a \in \mathbb{R}$ so darstellen:

y	0	1	1,5	2
P(Y = y)	0,4	1,5a	a	0,5a

5.1 Berechnen Sie den Parameter a und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y geeignet graphisch dar. (3 BE)

5.2 Setzen Sie $a = 0{,}2$. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Verlängerung der Öffnungszeit größer ist als der Erwartungswert $E(Y)$. (3 BE)

2003 SI

2.0 Bei der Untersuchung von Kiefernadeln wird die Länge L von 200 zufällig ausgewählten Nadeln bestimmt und in sechs Längengruppen eingeteilt. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der jeweiligen Längengruppe an. Dabei ergibt sich folgende Verteilung mit $a; b \in \mathbb{N}$:

L in mm	$L \le 40$	$40 < L \le 44$	$44 < L \le 48$	$48 < L \le 52$	$52 < L \le 56$	$L > 56$
Längengruppe	1	2	3	4	5	6
Anzahl	8	a	2a	90	b	12

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Nadel in einer der Längengruppe 4 bis 6 liegt, beträgt 0,66.

2.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b. (3 BE)

2.2.0 Setzen Sie für die folgenden Teilaufgaben $a = 20$ und für $b = 30$.

2.2.1 Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm. (4 BE)

2.2.2 Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (6 BE)

2002 SI

2.0 Die Druckmaschine wird korrigiert. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fehlerarten an, die bei einer zufällig ausgewählten Briefmarke des neuen Drucks auftreten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann mit Hilfe eines geeigneten Parameters $a \in \mathbb{R}$ so dargestellt werden:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$0{,}4a$	$0{,}025a^2$	0,05	0,05

2.1 Berechnen Sie den Parameter a. (4 BE)

Für die Teilaufgabe 2.2 gilt: $a = 2$.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße innerhalb der zweifachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

2000 SII

3.0 Der Boden eines Badezimmers wird gefliest. Erfahrungsgemäß können auf einer gefliesten Fläche von der Größe dieses Sanitärraums innerhalb des ersten Jahres nach Verlegung der betreffenden Fliesensorte insgesamt höchstens fünf Risse auftreten. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Risse in den Fliesen des Badezimmers an, die in diesem Zeitraum entstehen. Mit geeigneten Werten von a und b (a, b $\in [0;1]$) lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X wie folgt darstellen:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	a	0,25	3b	0,1	b	0,05

3.1 Berechnen Sie a und b unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens zwei Risse auftreten, 0,8 beträgt. (4 BE)

(Ergebnis: a = 0,4; b = 0,05)

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Risse innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

1999 SII

4.0 Bei einem Kindergartenfest ist die Hauptattraktion ein in acht gleich große Sektoren unterteiltes Glücksrad. Fünf der Sektoren sind rot, zwei grün und einer blau gefärbt. Zur Rotation gebracht, kommt das Rad nach kurzer Zeit zum Stillstand und eine der Farben erscheint in einem Fenster. Bei einem Spiel wird das Glücksrad zweimal nacheinander zur Rotation gebracht. Erscheint beide Male der blaue Sektor, so erhält der entsprechende „Spieler“ 10 Gummibärchen als Gewinn, bei zwei grünen Sektoren 8 Bärchen, bei zwei roten 3 Bärchen; in allen anderen Fällen wird 1 Bärchen als „Trostpreis“ vergeben.
Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der in einem Spiel gewonnenen Gummibärchen an.

4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm.

4.2 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße Y.

2006 SII

3.0 Die Hochschule hat einen Eingangstest in Mathematik abgehalten, an dem genau 500 Studienanfänger aller Fachrichtungen teilgenommen haben. Die Notenverteilung ergibt sich aus der folgenden Tabelle, in der a, b und c entsprechende Konstanten darstellen:

Noten	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Prüflinge	a	b	167	122	b	c

Die Zufallsgröße Y gibt die Note eines beliebig herausgegriffenen Prüflings an. Für diese Zufallsgröße gilt: Der Erwartungswert $E(Y)$ beträgt 3,0 und die Varianz $Var(Y)$ ist gleich 1,7.

3.1 Zeigen Sie zunächst, dass sich aus den obigen Angaben folgendes lineare Gleichungssystem (LGS) herleiten lässt:

I. $a+2b+c=211$

II. $a+7b+6c=511$ (5 BE)

III. $a+29b+36c=1895$

3.2 Berechnen Sie nun aus dem LGS von 3.1 die Konstanten a, b und c. (4 BE)
[Lösung: $a=99$; $b=52$; $c=8$]

3.3 Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y an und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm. (4 BE)

3.4 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert $E(Y)$ liegen. Schraffieren Sie anschließend im Histogramm von Teilaufgabe 3.3 die zugehörige Fläche. (4 BE)

2007 SI

2.0 Der Mathematiklehrer einer größeren Klasse hat durch Beobachtungen über einen längeren Zeitraum bemerkt, dass ab und zu einige Schüler ihre Hausaufgabe zum fälligen Termin nicht gemacht haben. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Schüler dieser Klasse an, die zu einem beliebigen Termin die Mathematik-Hausaufgabe nicht erledigt haben. Dabei ergibt sich mit den Parametern a, b, c ∈ R folgende Verteilung (andere Zufallswerte treten nicht auf):

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	a	b	0,2	B+c	c	0,1	0,05

2.1 Berechnen Sie die Parameter a, b und c, wenn im Durchschnitt 3 Schüler ihre Hausaufgabe nicht gemacht haben und $P(X \le 3) = 0,65$ ist. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X geeignet graphisch dar.
[Teilergebnis: a = 0,05; b = 0,1] (8BE)

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (4 BE)

2008 SI

3.0 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tassen Tee an, die ein Gast bei einem Frühstück trinkt. Es ergibt sich folgende Verteilung:

x	0	1	2	3	4	5	6 oder mehr
Gästezahl	10	15	5	12	6	2	0

3.1 Erstellen Sie für die Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeitsverteilung und stellen Sie diese geeignet graphisch dar.
Berechnen Sie, mit wie viel Tassen Tee der Herbergsvater im Durchschnitt pro Gast rechnen kann. (4 BE)

3.2 Berechnen Sie wie viele Tassen Tee Max pro Gast mindestens bereitstellen muss, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Tee ausreicht, mehr als 90% betragen soll. (3 BE)

2009 SI

3.0 In einer Zulassungsstelle werden Fahrzeuge in fünf Leistungsklassen erfasst. Die Zufallsgröße X gibt die Leistungsklasse eines zufällig ausgewählten Fahrzeugs an. Mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	a	b	0,18	0,13	0,14

3.1 Berechnen Sie a und b für den Fall, dass für den Erwartungswert E(X) gilt:
E(X) = 2,48. (4 BE)
[Teilergebnis: $a = 0,38$]

3.2 Zeichnen Sie ein Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung. (2 BE)

3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.
Schraffieren Sie die zu dieser Wahrscheinlichkeit gehörende Fläche im Histogramm von Teilaufgabe 3.2. (6 BE)