

§ 1 Zufallsexperiment; Ergebnis; Ergebnisraum; Baumdiagramm

In der Stochastik beschäftigt man sich vorwiegend mit der Untersuchung von Zufallsexperimenten.

1.1 Zufallsexperiment, Ergebnis und Ergebnisraum

Definition: Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, den man unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholen kann und der bei mehreren Versuchen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann.

Beispiele:

Einige der bekanntesten Zufallsexperimente sind Lotto, Roulette, Werfen einer Münze, Werfen eines Würfels, Ziehen einer Kugel aus einer Urne.

Definition: Jeden Ausgang eines Zufallsexperiments bezeichnet man als Ergebnis. Die Menge aller verschiedenen Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man Ergebnisraum Ω . Die Mächtigkeit $|\Omega|$ eines Ergebnisraums Ω ist die Anzahl der Elemente von Ω .

Beispiele:

a) Lotto (Ziehen der ersten Kugel)

$$\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 46; 47; 48; 49\}$$

$$|\Omega| = 49$$

b) Roulette

$$\Omega = \{0; 1; 2; 3; \dots; 34; 35; 36\}$$

$$|\Omega| = 37$$

c) Werfen einer Münze

$$\Omega = \{\text{"Kopf"}, \text{"Zahl"}\}$$

$$|\Omega| = 2$$

d) Werfen eines Würfels

$$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$|\Omega_1| = 6$$

$$\Omega_2 = \{\text{"6"}, \text{"Nicht 6"}\}$$

$$|\Omega_2| = 2$$

$$\Omega_3 = \{\text{"Gerade Zahl"}, \text{"Ungerade Zahl"}\}$$

$$|\Omega_3| = 2$$

Dabei kann es bei einem Zufallsexperiment auch mehrere Ergebnisräume geben, je nachdem wofür man sich bei einem Experiment interessiert. Im letzten Beispiel nennt man Ω_2 eine Vergrößerung von Ω_1 und umgekehrt Ω_1 eine Verfeinerung von Ω_2 oder Ω_3 .

1.2 Das Baumdiagramm

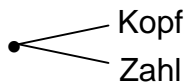
Das Baumdiagramm ist eine graphische Darstellung, die zur Veranschaulichung der Ergebnisse eines Zufallsexperiments dient.

Man unterscheidet dabei grob zwei Arten von Zufallsexperimenten:

- a) Einstufige Zufallsexperimente bestehen aus der einmaligen Durchführung eines Zufallsexperiments (nur ein Versuch). Dabei macht man sich Gedanken, welche möglichen Ausgänge (Ergebnisse) eintreten können.
- b) Mehrstufige Zufallsexperimente bestehen aus der mehrmaligen Durchführung eines Zufallsexperiments (mehrere Versuche hintereinander). Dabei macht man sich nach jedem Versuch Gedanken über die möglichen Ausgänge.

Beispiele: Zeichnen Sie zu folgenden Zufallsexperimenten das zugehörige Baumdiagramm, geben Sie den Ergebnisraum Ω und die Mächtigkeit von Ω an.

- 1.) "Werfen einer Münze"



$$\Omega = \{ \text{"Kopf"}, \text{"Zahl"} \}; |\Omega| = 2$$

- 2.) "Werfen eines Würfels"
- 3.) "Augensumme beim Werfen zweier Würfel"
- 4.) "Aus einer Urne mit mehreren roten und schwarzen Kugeln, die sonst nicht unterscheidbar sind werden
- a) nacheinander
 - b) gleichzeitig
- zwei Kugeln zufällig herausgegriffen.
- 5.) Zwei Münzen werden nacheinander geworfen.
- 6.) "In einer Urne befinden sich drei nummerierte Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln gezogen.
- a) Ziehen mit Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge
 - b) Ziehen ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge
 - c) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
- 7.) Gleichzeitiges Werfen zweier Münzen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).
- 8.) Drei Kugeln mit den Nummern 1, 2 und 3 werden nacheinander aus einer Urne zufällig herausgegriffen.
- 9.) Eine Urne enthält drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln zufällig herausgegriffen.
- a) gleichzeitig
 - b) nacheinander, ohne die einzelnen Kugeln wieder zurückzulegen
 - c) nacheinander, mit Zurücklegen der gezogenen Kugeln

- 10.) Ein Erlebnisparkbetreiber befragt eine große Zahl von Besuchern, ob sie aus der Region (R) kommen oder überregionale Besucher (\bar{R}) sind. Ferner interessiert, ob sie mit dem Auto (A), dem Bus (B) oder auf sonstige Weise (S) angereist sind. Das Ergebnis der Befragung wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
Zeichnen Sie das zu diesem Zufallsexperiment gehörende Baumdiagramm, geben Sie den zugehörigen Ergebnisraum an und bestimmen Sie die Anzahl der Ergebnisse dieses Zufallsexperiments.
- 11.) In einem Mischwald wird eine Versuchsfläche auf Schäden durch Wildverbiss an den Jungtrieben der Bäume untersucht. Einzige Nadelbaumart ist die Fichte (F). Auf der Versuchsfläche befinden sich außerdem Buchen (B) ansonsten Eichen (E). Alle Baumarten kommen auf der Fläche gleichmäßig verteilt vor. Als Zufallsexperiment wird die Auswahl eines beliebigen Baumes betrachtet; dabei wird die Baumart festgestellt und geprüft, ob Verbiss (V) vorliegt oder nicht (\bar{V}).
Zeichnen Sie das zu diesem Zufallsexperiment gehörende Baumdiagramm, geben Sie den zugehörigen Ergebnisraum an und bestimmen Sie die Anzahl der Ergebnisse dieses Zufallsexperiments.
- 12.) Die Post eines kleineren Landes gibt den Druck einer neuen Sonderbriefmarke in Auftrag. Beim ersten Probedruck einer größeren Menge dieser Marken werden noch Fehler bei der Zählung, beim Farbton sowie bei der Grafik festgestellt. Es kann davon ausgegangen werden, dass diese Fehlerarten unabhängig voneinander auftreten und dass die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens während des Probedrucks konstant bleiben.
Folgende Bezeichnungen seien vorgegeben:
Z: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Zählung in Ordnung.
F: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Farbe in Ordnung.
G: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Grafik in Ordnung.
Eine zufällig ausgewählte Briefmarke wird hinsichtlich der Merkmale Z, F und G untersucht.
Zeichnen Sie das Baumdiagramm dieses Zufallsexperiments und geben Sie den zugehörigen Ergebnisraum an.
- 13.) In einem Kindergarten trinkt jedes der Kinder in der Frühstückspause genau eines der Getränke Kakao (K), Erdbeermilch (E) bzw. Vanillemilch (V).
Veranschaulichen Sie das Wahlverhalten eines zufällig ausgewählten Kindes an zwei aufeinanderfolgenden Tagen in einem Baumdiagramm und geben Sie den zugehörigen Ergebnisraum an.