Lösen linearer Gleichungssysteme

<u>Eine Aufgabe aus einem alten chinesischen Rechenbuch (2600 v. Chr.)</u>
In einem Käfig sind Hasen und Hühner eingesperrt. Die Tiere haben zusammen 35 Köpfe und 94 Füße. Wie viele Hasen und wie viele Hühner sind es?

Bezeichnet man die Anzahl der Hasen mit x und die Anzahl der Hühner mit y, so folgt:

1. Die Anzahl der Tiere entspricht der Summe der Köpfe $\qquad x+y=35$
2. Ein Hase hat vier und ein Huhn zwei Füße $\qquad 4x+2y=94$

Man hat nun zwei Gleichungen, in denen zwei Unbekannte Größen enthalten sind. Kommen diese Größen nur linear vor, so spricht man hier von einem linearen Gleichungssystem.

Es gibt verschiedene Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu Lösen!
Im Hinblick auf noch kommende Aufgaben bietet sich hier das Additionsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme an.

$$
\begin{array}{cl}
\text{I} & x+y=35 \\
\text{II} & 4x+2y=94 \\
\hline
4\cdot\text{I} & 4x+4y=140 \\
\text{II} & 4x+2y=94 \\
\hline\hline
4\cdot\text{I}-\text{II} & 2y=46 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{y=23}} \\
 & \text{in I: } x+23=35 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=12}}
\end{array}
$$

Die beiden Gleichungen des Gleichungssystem müssen mit geeigneten Zahlen so multipliziert werden, dass die Koeffizienten vor einer Unbekannten betragsmäßig gleich sind. Dann können die beiden Gleichungen (bei unterschiedlichen Vorzeichen) addiert bzw. (bei gleichen Vorzeichen) subtrahiert werden. Übrig bleibt eine Gleichung mit einer Unbekannten weniger.

1. Löse folgende lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren.

a) $\begin{array}{r} x-2y=-4 \\ -3x+7y=15 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{(2\,|\,3)\}$

b) $\begin{array}{r} 2x+5y=-2 \\ 7x-10y=-7 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{(-1\,|\,0)\}$

c) $\begin{array}{r} 4a+2b+4=0 \\ 16a-4b+4=0 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{(-\tfrac{1}{2}\,|\,-1)\}$
1992 AI 3.1

d) $\begin{array}{r} 16a+4b=4 \\ 8a+b=0 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{(-\tfrac{1}{4}\,|\,2)\}$
1994 AII 2.1

e) $\begin{array}{r} 16a+4b=4 \\ 8a+b=-3 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{(-1\,|\,5)\}$
1995 AII 3.1

f) $\begin{array}{r} 4a+2b+\frac{8}{3}=0 \\ 24a+18b+16=0 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{(-\tfrac{2}{3}\,|\,0)\}$
1996 AI 3.1

g) $\begin{array}{r} 9a-3b=-9 \\ -6a+b=0 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{(1\,|\,6)\}$
2005 AI 3.1

h) $\begin{array}{r} \frac{1}{2}x-3y=6 \\ -x+6y=-12 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{(x\,|\,\tfrac{1}{6}x-2)\}$

i) $\begin{aligned} 3x+4y&=16 \\ 5x+12y&=16 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(8\,|\,-2)\}$

j) $\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{2}y&=3 \\ -4x+3y&=5 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(1\tfrac{15}{24}\,|\,3\tfrac{5}{6})\}$

k) $\begin{aligned} 2x+3y&=7 \\ \tfrac{2}{3}x+y&=-1 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{\ \}$

l) $\begin{aligned} 4x-8y&=-12 \\ 8x-4y&=12 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(3\,|\,3)\}$

m) $\begin{aligned} 4x+y&=-6 \\ -8x+5y&=-18 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(-\tfrac{3}{7}\,|\,-4\tfrac{2}{7})\}$

n) $\begin{aligned} 3x-2y&=0 \\ 4x+5y&=0 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(0\,|\,0)\}$

o) $\begin{aligned} 3x-2y&=25 \\ -x-5y&=3 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(7\,|\,-2)\}$

p) $\begin{aligned} -x+4y&=2 \\ 2x-8y&=-4 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(x\,|\,\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{2})\}$

q) $\begin{aligned} 3x-6y&=1 \\ -2x+4y&=2 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{\ \}$

r) $\begin{aligned} 2x+3y&=9 \\ 6x-2y&=-28 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(-3\,|\,5)\}$

s) $\begin{aligned} 5x-4y&=2 \\ 3x+2y&=32 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(6\,|\,7)\}$

t) $\begin{aligned} x+5y&=1 \\ -2x+3y&=11 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(-4\,|\,1)\}$

Nach ein paar Aufgaben kann dieses Additionsverfahren in den Gauß´schen Algorithmus übergeführt werden. (Auch Gleichungssysteme betrachten, die keine oder unendlich viele Lösungen haben!)

Textaufgaben:

2. Altersprobleme
   a) Eine Mutter ist siebenmal so alt wie ihre Tochter; beide zusammen blicken auf insgesamt 40 Lebensjahre zurück. Wie alt sind Mutter und Tochter?
   $(35; 5)$
   b) Eine Mutter war vor sieben Jahren siebenmal so alt wie ihrer Tochter damals war. In 3 Jahren wird die Mutter dreimal so alt sein, wie ihre Tochter sein wird. Wie alt sind jetzt Mutter und Tochter?
   $(42; 12)$
3. Jägerlatein
   a) „Die erlegten Fasane und Hasen haben zusammen 27 Köpfe und 92 Füße.“ Wie viele Fasane und wie viele Hasen wurden erlegt?
   $(8; 19)$
   b) „Die erlegten Fasane und Hasen hatten zusammen 116 Füße. Beim Verkauf erhielten wir für jeden Fasan 15€ und für jeden Hasen 25€; insgesamt erzielten wir 750€.“ Wie viele Fasane und wie viele Hasen waren es?
   $(10; 24)$
4. Aus dem Geschäftsleben
   a) Ein Weinhändler bietet an: 12 Flaschen Frankenwein und 8 Flaschen Moselwein für insgesamt 120,40€ oder 6 Flaschen Frankenwein und 14 Flaschen Moselwein der gleichen Lagen und desselben Jahrgangs zu

insgesamt 107,20€. Wie teuer ist eine Flasche von jeder Sorte?
$\left(F: 6{,}90€; M: 4{,}70€\right)$

b) Ein Obsthändler verkauft 1kg Äpfel zu 2,00€ und 1kg Birnen zu 2,50€ und erzielt dabei einen Tagesumsatz von 1000€. Er kalkuliert nun: Wenn er die Preise jeweils um 10% senkt, erhöht sich bei den Äpfeln der Absatz um 40%, bei den Birnen um 20%; wegen der geringeren Gewinnspanne muss der Tagesumsatz dann jedoch 1250€ erreichen. Wie viele kg Äpfel bzw. Birnen muss er verkaufen?
$\left(472\tfrac{2}{9}; 22\tfrac{2}{9}\right)$

5. Aus der vollständigen Anleitung zur Algebra von Leonard Euler:
Zwei Personen sind 29 Rubel schuldig; nun hat zwar jeder Geld, doch nicht soviel, dass er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte; darum sagt der erste zum anderen: Gibst Du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes, so kann ich die Schuld sogleich allein bezahlen. Der andere antwortet dagegen: Gibst du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so kann ich die Schuld allein bezahlen. Wie viel Geld hat jeder?
6. Eine Gerade verläuft durch die Punkte $A(1|-1)$ und $B(5|1)$. Bestimme die Gleichung dieser Geraden.
$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Gleichungssysteme mit Parameter:

7. Löse folgende Aufgaben und prüfe ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass das Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen hat

a) $\begin{aligned} 2x - y &= a \\ -3x + 2y &= -6 \end{aligned}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{L} = \{(2a-6 \mid 3a-12)\}$

b) $\begin{aligned} ax - 2y &= -8 \\ -4x + 4y &= 5 \end{aligned}$

$\begin{aligned} 2ax - 4y &= -16 \\ -4x + 4y &= 5 \end{aligned}$

$2ax - 4x = -11 \Rightarrow (2a-4)x = -11$

1. Fall: $a = 2$

$0 = -11 \ (f) \Rightarrow \mathbb{L} = \{\ \}$

2. Fall: $a \neq 2$

$x = \frac{-11}{2a-4}$ eingesetzt:

$a \cdot \frac{-11}{2a-4} - 2y = -8 \Rightarrow y = 4 - \frac{a}{2} \cdot \frac{11}{2a-4} = \frac{4(4a-8)}{4a-8} - \frac{11a}{4a-8} = \frac{5a-32}{4a-8}$

$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{-11}{2a-4} \mid \frac{5a-32}{4a-8}\right)\right\}$

c) $\begin{aligned} 3x + ay &= 7 \\ 6x - y &= -11 \end{aligned}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

Für $a = \frac{1}{2}$ folgt $\mathbb{L} = \{\ \}$

Für $a \neq \frac{1}{2}$ folgt $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{7-11a}{6a+3} \mid \frac{25}{2a+1}\right)\right\}$

d) $\begin{aligned} 4ax + 2y &= 6 \\ 2x + ay &= 3 \end{aligned}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

Für $a = 1$ folgt $\mathbb{L} = \{(x \mid -2x+3)\}$

Für $a = -1$ folgt $\mathbb{L} = \{\ \}$

e) $\begin{aligned} ax + 2y &= 7 \\ 2ax - y &= -11 \end{aligned}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

f) $\begin{aligned} x + ay &= 3 \\ -2x + 3y &= 2a \end{aligned}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

Doch oft hat man Gleichungssysteme mit drei Unbekannten. Um dieses System eindeutig zu lösen sind mindestens drei Gleichungen notwendig. Wie man solch ein Gleichungssystem löst wird in folgendem Beispiel gezeigt:

8. Berechne die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme

a) $\begin{array}{r} \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \\ -4a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|\frac{7}{12}\right)\right\}$

b) $\begin{array}{r} a + b + c = 4 \\ 1{,}5a + b = 0 \\ 2a + b = 4 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(8|-12|8\right)\right\}$

c) $\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x - 3z = -8 \\ 3x - z = 0 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(1|-1|3\right)\right\}$

d) $\begin{array}{r} 2x - y - z = -1 \\ 2y + 3z = 3 \\ 3y + 8z = 1 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{2}\middle|3\middle|-1\right)\right\}$

e) $\begin{array}{r} a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 4a + b = 3 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(1|-1|-2\right)\right\}$ 1995 AI 3.1

f) $\begin{array}{r} 36a + 6b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 3 \\ 6a + b = 0 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{1}{3}\middle|2\middle|0\right)\right\}$ 1996 AII 4.1

g) $\begin{array}{r} x - 6y - 2z = 14 \\ 5x + 4y + 3z = 5 \\ 2x + z = 3 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(4|0|-5\right)\right\}$

h) $\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + 5y - z = 2 \\ 2x - 2z = 1 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\ \right\}$

i) $\begin{array}{r} x + y = 20 \\ y + z = 30 \\ x + z = 40 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(15|5|25\right)\right\}$

j) $\begin{array}{r} 16a + 4b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 3 \\ 8a + b = -2 \end{array}$ $\quad \mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{1}{4}\middle|0\middle|4\right)\right\}$ 2003 AII 2.1

k) $\begin{array}{r} 9a-3b+c=9 \\ 9a+3b+c=1 \\ 6a+b=0 \end{array}$ $\quad \mathbb{L}=\left\{\left(\frac{2}{9}\middle|-\frac{4}{3}\middle|3\right)\right\}$ 2002 AI 3.1

l) $\begin{array}{r} 4a+2b+c=8 \\ 16a+4b+c=44 \\ 8a+b=48 \end{array}$ $\quad \mathbb{L}=\left\{\left(15\middle|-72\middle|92\right)\right\}$ 2001 AI 1.3.1

m) $\begin{array}{r} a+b+c=-3 \\ 16a+4b+c=-6 \\ 6a+b=-2 \end{array}$ $\quad \mathbb{L}=\left\{\left(-1\middle|4\middle|-6\right)\right\}$ 1997 AII 3.1

n) $\begin{array}{r} 36a+6b+c=0 \\ 9a+3b+c=6{,}75 \\ 12a+b=-3 \end{array}$ $\quad \mathbb{L}=\left\{\left(-\frac{1}{4}\middle|0\middle|9\right)\right\}$ 1990 AII 2.1.1+2.1.2

Doch oft kommen in jeder der drei Gleichungen auch alle drei Unbekannte vor.

$$\begin{array}{rl} x+2y-4z=-12 & \cdot 2 \\ x-y+4z=17 & - \\ -2x+2y+z=2 & + \\ \hline x+2y-4z=-12 & \\ 3y-8z=-29 & \cdot 2 \\ 6y-7z=-22 & - \\ \hline x+2y-4z=-12 & \qquad x+2\cdot 1-4\cdot 4=-12 \;\Rightarrow\; x=2 \\ 3y-8z=-29 & \qquad 3y-8\cdot 4=-29 \;\Rightarrow\; y=1 \\ -9z=-36 & \Rightarrow\; z=4 \end{array}$$

$\mathbb{L}=\left\{\left(2\,|\,1\,|\,4\right)\right\}$

9. Berechne die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme

a.) $\begin{array}{r} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=-1 \\ 5x-y+2z=1 \end{array}$

$\mathbb{L}=\left\{\left(1;0;-2\right)\right\}$

b.) $\begin{array}{r} 2x-y+3z=-1 \\ x+5y-2z=-4 \\ 3x-2y+z=-5 \end{array}$

$\mathbb{L}=\left\{\left(-2;0;1\right)\right\}$

c.) $\begin{array}{r} 4x+7y+12z=-5 \\ -2x+3y-4z=-4 \\ 2x+y+9z=0 \end{array}$

$\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{2};-1;0\right)\right\}$

d.) $\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 4x+9y+16z=0 \end{array}$

$\mathbb{L}=\left\{\left(0;0;0\right)\right\}$

e.)
$$\begin{aligned} 3x-2y+z&=-2\\ 6x+y-3z&=11\\ 7x-4y+4z&=-5 \end{aligned}$$
$\mathbb{L}=\{(1;2;-1)\}$

f.)
$$\begin{aligned} 5x-9y+3z&=16\\ 6x-7y-6z&=0\\ 8x+8y-3z&=10 \end{aligned}$$
$\mathbb{L}=\{(2;0;2)\}$

g.)
$$\begin{aligned} 3x-5y+6z&=12\\ 4x+2y-z&=-11\\ -x+6y&=2 \end{aligned}$$
$\mathbb{L}=\{(-2;0;3)\}$

h.)
$$\begin{aligned} -0{,}5x+4y-2z&=19\\ 3x+6z&=0\\ 8x+3y-4z&=72 \end{aligned}$$
$\mathbb{L}=\{(6;4;-3)\}$

i.)
$$\begin{aligned} 4x+3y+6z&=1\\ 4x-y+2z&=-2\\ 10x+2y+2z&=3 \end{aligned}$$
$\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{3}{20};1\frac{23}{30};-\frac{37}{60}\right)\right\}$

k.)
$$\begin{aligned} 9x+5y+6z&=6\\ -3x+4y-9z&=-1\\ 6x+3y+3z&=3 \end{aligned}$$
$\mathbb{L}=\left\{\left(-\frac{1}{3};1;\frac{2}{3}\right)\right\}$

l.)
$$\begin{aligned} x+4y-3z&=1\\ 2x+y+z&=4\\ 5x-3y+8z&=-3 \end{aligned}$$
$\mathbb{L}=\varnothing$

m.)
$$\begin{aligned} a+b+c&=19\\ 8a+4b+2c&=26\\ 27a+9b+3c&=27 \end{aligned}$$
2001 AII 1.1

$\mathbb{L}=\{(1|-9|27)\}$

10. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} 3a-b+2c+d&=0\\ a+2b-c-2d&=2\\ -2a-3b+2c+2d&=1\\ 2a+4b-c-3d&=5 \end{aligned}$$
$\mathbb{L}=\{(-1|1|3|-2)\}$

b)
$$\begin{aligned} a+3b-2c+5d&=2\\ 2a-b+3c-4d&=4\\ -3a-5b+7c+2d&=3\\ -a+2b+c+6d&=-1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2a+3b-2c-2d&=-1\\ a-2b+c+d&=0\\ 5a+4b-3c-4d&=-7\\ -a+b+2c+3d&=10 \end{aligned}$$

Überbestimmte Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem ist überbestimmt, wenn die Anzahl der Gleichungen größer als die Anzahl der Unbekannten ist.

Bsp.:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=-4\\ 0{,}5x-6y&=-1\\ -3x+5y&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -4\\ 0{,}5 & -6 & -1\\ -3 & 5 & 6\\ \hline 2 & 3 & -4\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 19 & 0\\ \hline 2 & 3 & -4\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow x=-2\\ \Rightarrow y=0 \end{array}$$

Setzt man die Lösung in jede der Gleichungen ein, so erhält man nur wahre Aussagen (erfüllen jede Gleichung).

$$\mathbb{L}=\{(-2\,|\,0)\}$$

12. Löse folgende überbestimmte Gleichungssysteme

a) $\begin{aligned} 3x+y&=3\\ x-y&=-1\\ 2x+4y&=7 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(0{,}5\,|\,1{,}5)\}$

b) $\begin{aligned} x-7y&=22\\ 3x+5y&=-12\\ 1{,}5x+3y&=4 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{\ \}$

c) $\begin{aligned} x-2y+2z&=4\\ 2x-3z&=-2\\ -x+2y-3z&=-6\\ y+z&=3 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(2\,|\,1\,|\,2)\}$

d) $\begin{aligned} x-2y+2z&=4\\ 2x-3z&=-2\\ -x+2y-3z&=-6\\ x+z&=3 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{\ \}$

Unterbestimmte Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem ist unterbestimmt, wenn die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist.

Bsp.:

1.) $x+2y=2 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x+1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}=\left\{\left(x \,|\, -\frac{1}{2}x+1\right)\right\}; \quad x \in \mathbb{R}$

2.) $-2x+3y=6 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x+2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}=\left\{\left(x \,|\, \frac{2}{3}x+2\right)\right\}; \quad x \in \mathbb{R}$

3.) $\text{I} \quad 2x-4y=6$

$\text{II} \quad -x+2y=-3$

Es gilt: $\text{II}=-2\cdot\text{I}$

Es ist das unterbestimmet Glgssyst. $2x-4y=6$ zu lösen

$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x-1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}=\left\{\left(x \,|\, \frac{1}{2}x-1{,}5\right)\right\}; \quad x \in \mathbb{R}$

4.)
$$\begin{aligned} 5x+2y-z&=1 \quad \cdot 2 \\ 2x+y+2z&=3 \quad + \end{aligned}$$

$12x+5y=5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y=-2{,}4x+1}}$

$2x-2{,}4x+1+2z=3 \quad \Rightarrow \quad z=0{,}2x+1$

$\mathbb{L}=\left\{\left(x \,|\, -2{,}4x+1 \,|\, 0{,}2x+1\right)\right\}; \quad x \in \mathbb{R}$

13. Löse folgende unterbestimmte Gleichungssysteme

a) $\begin{aligned} x+y-3z&=3 \\ x-y+z&=1 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{aligned} 6x-2y+3z&=9 \\ 2x-\frac{2}{3}y+z&=0 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{\ \}$

c) $\begin{aligned} -x-2y+5z&=0 \\ 3x+7y-3z&=0{,}5 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}29\\-12\\1\end{pmatrix}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}$

d) $\begin{aligned} 2a+b-c+3d&=0 \\ a-3b-d&=3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\6\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\7\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\5\\1\end{pmatrix}\right\}; \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

Anwendung Gleichungssysteme

1.)(AII 2000) Einem Betrieb entstehen bei der Herstellung einer Ware Gesamtkosten, die von der Menge des hergestellten Produkts (kurz: Produktmenge x) abhängen. Beispiel: Die Herstellung von 3 Mengeneinheiten (ME) kostet 30 Geldeinheiten (GE). (Zur Vereinfachung werden für sämtliche Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen)
Um die Problematik mathematisch erfassen zu können, wird angenommen, dass die Gesamtkosten durch eine ganzrationale Funktion k dritten Grades beschrieben werden, deren Graph G_k durch die Punkte $A(0|3)$, $B(1|22)$, $C(2|29)$ und $D(3|30)$ verläuft. Für die Definitionsmenge der Funktion k gilt: $\mathbb{D}_k = [0;7]$.
Zeigen Sie, dass der Funktionsterm die Form $k(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 3$ hat.

2.)Für den Bau eines Hauses benötigt eine Familie einen Zwischenfinanzierungskredit von 120.000€. Sie erhält ihn von drei verschiedenen Banken B_1, B_2, B_3 zu jeweils 5%; 10%, 8% Zinsen. Nach einem Jahr entrichtet sie insgesamt an die drei Banken 8.000€ Zinsen. Im zweiten Jahr erhöht B_1 den Zinssatz um 1% und B_2 um 0,5%, während B_3 den alten Zinssatz beibehält. (Während der gesamten Laufzeit erfolgt keine Tilgung.) Am Ende des zweiten Jahres sind insgesamt 8.650€ Zinsen fällig. Welche Beträge wurden von den einzelnen Banken ausgeliehen?
A: 60.000   B: 10.000   C: 50.000

3.) Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems

a)
$$\begin{aligned} 2a + 2b - 2c + 2d &= 8 \\ a - b + c + 2d &= 10 \\ 2a - 3b + 4c - 3d &= -4 \\ -2a + 4b - 3c + 3d &= 9 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{(1|2|3|4)\}$

b)
$$\begin{aligned} x + 2z + w &= 0 \\ y + z - w &= 0 \\ -x + y &= 0 \\ -3x + 3y - z - 2w &= 0 \end{aligned}$$

4) Bestimme die Gleichung der Parabel, auf der die Punkte $A(1|2)$, $B(-1|6)$ und $C(2|3)$ liegen.
$f: x \mapsto x^2 - 2x + 3$

5) Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ergaben sich folgende Messwerte:

t in s	1	2	3
s in m	14	28	50

Geben Sie das Zeit-Ort-Gesetz $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ für diese Bewegung an. (Bestimme also die Koeffizienten x_0, v_0 und a)

$s(t) = 8 + 2t + 4t^2$

6) Eine Parabel hat den Punkt $S(2\,|\,2)$ als Scheitel. Sie geht durch den Ursprung. Wie lautet ihre Gleichung, und wo schneidet sie die x-Achse zum zweitenmal?

$f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - x \quad N_2(4\,|\,0)$

7) Wie lauten die Funktionsterme der quadratischen Funktionen f, deren Graphen jeweils durch die folgende Punkte gehen?

a) $A(-5\,|\,6); B(-3\,|\,-4); C(3\,|\,14)$ — $f: x \mapsto x^2 + 3x - 4$

b) $A(-6\,|\,-8); B(-2\,|\,12); C(3\,|\,-8)$ — $f: x \mapsto -x^2 - 3x + 10$

c) $A(-2\,|\,0); B(2\,|\,4); C(3\,|\,10)$ — $f: x \mapsto x^2 + x - 2$

d) $A(-3\,|\,3); B(1\,|\,-3); C(5\,|\,7)$ — $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$

8) Der Graph einer quadratischen Funktion f geht durch den Punkt $P_1(0\,|\,-2\frac{7}{9})$ und wird in den Punkten $P_2(2\,|\,?)$ und $P_3(-3\,|\,?)$ vom Graphen der Funktion $g: x \mapsto 1\frac{2}{3}x + \frac{5}{9};\ \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ geschnitten. Bestimme den Funktionsterm der Funktion f.

$f: x \mapsto \frac{5}{9}x^2 + 2\frac{2}{9}x - 2\frac{7}{9}$

9) Für ein großes Blumengesteck werden insgesamt 200 Blumen benötigt, die aus drei verschiedenen Preiskategorien ausgewählt werden können. x gibt die Anzahl der Blumen mit Stückpreis 0,50€ an, y die Anzahl mit Stückpreis 1,00€ und z die Anzahl mit Stückpreis 5,00€. Berechnen Sie, wie viele Blumen der verschiedenen Kategorien verwendet werden müssen, wenn der Gesamtpreis des Gestecks 250,00€ betragen soll und die Blumen der beiden billigeren Kategorien insgesamt neunmal so häufig verwendet werden sollen wie die der teuersten Kategorie.

10) Eine Parabel schneidet die x-Achse bei $x_N = 3$ und hat den Scheitel $S(1\,|\,-1)$. Wie lautet der Funktionsterm?

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 1$

11) Der Graph einer quadratischen Funktion schneidet die y-Achse bei $y = 1$ und enthält die Punkte $A(2\,|\,-1)$ und $B(4\,|\,1)$. Wie lauter der Funktionsterm?

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

12) Der Graph einer quadratischen Funktion schneidet die y-Achse bei $y = -3$, die x-Achse bei $x = -2$ und enthält den Punkt $A(-4\,|\,1)$. Wie lauter der Funktionsterm?

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$

13) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$, schneidet die y-Achse bei $y = 2$ und enthält den Punkt $A(3\,|\,2)$. Wie lautet der Funktionsterm?

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1{,}5x^2 + 2$

14) Der Graph einer Parabel mit der Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$ enthält den Punkt $A(1|1)$. Die Gerade mit der Gleichung $g(x) = 2ax + b$ verläuft durch den Punkt $B(-1|1)$. Die Gerade schneidet die Parabel an der Stelle $x = 2$. Bestimme die Gleichung der Parabel und der Geraden.

$p(x) = x^2 + 3x - 3$; $g(x) = 2x + 3$

15) Der Graph einer Parabel mit der Gleichung $p(x) = ax^2 + bx$ hat eine Nullstelle bei $x_1 = -4$. Die Gerade mit der Gleichung $g(x) = mx + t$ schneidet die Parabel in ihrem Scheitel, verläuft durch die zweite Nullstelle der Parabel und enthält den Punkt $A(1|1)$. Bestimme die Gleichung der Parabel und der Geraden.

$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$; $g(x) = x$

Gauß´scher Algorithmus

Das Additionsverfahren lässt sich auch etwas verkürzt anwenden!
Das Prinzip, das dem Gauß-Algorithmus zugrunde liegt ist das des Additionsverfahrens, lediglich dass man sich jetzt nur auf die Koeffizienten konzentriert und die Variablen weglässt. Die Koeffizienten der Unbekannten x, y und z ordnet man schematisch in Zeilen und Spalten an. Man erhält somit eine Koeffizientenmatrix A
Diese wird dann, durch einen vertikalen Strich getrennt, und um die konstanten Werte, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen erweitert. Die so entstandene Matrix nennt man dann die erweiterte Koeffizientenmatrix A_{erw} .

Bsp.:

$$\begin{aligned} x-y+2z&=-5\\ -2x+y-z&=0\\ 3x+4y+z&=7 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 1 \end{array}}_{\text{Koeffizientenmatrix A}}\left|\begin{array}{c} -5\\ 0\\ 7 \end{array}\right.}_{\text{erweiterte Koeffizientenmatrix } A_{erw}}$$

Das Ziel des Algorithmus ist es nun, die Koeffizientenmatrix A auf Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) zu bringen. D.h., dass unterhalb der Diagonalen von links oben nach rechts unten lauter Nullen stehen. Dies geschieht durch entsprechender Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl und anschließender Addition/Subtraktion zweier Zeilen.

$$\begin{array}{ccc|c|l} 1 & -1 & 2 & -5 & \cdot 2 \quad \cdot 3\\ -2 & 1 & -1 & 0 & + \\ 3 & 4 & 1 & 7 & - \\ \hline 1 & -1 & 2 & -5 & \\ 0 & -1 & 3 & -10 & \cdot 7\\ 0 & -7 & 5 & -22 & - \\ \hline 1 & -1 & 2 & -5 & \\ 0 & -1 & 3 & -10 & \\ 0 & 0 & 16 & -48 & \end{array}$$

Nachdem die Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) der Koeffizientenmatrix erreicht ist, stellt man das Gleichungssystem wieder auf und löst es von „unten nach oben „

$$\begin{array}{lll} x-y+2z=-5 & & x-1-6=-5 \Rightarrow x=2\\ -y+3z=-10 & -y-9=-10 \Rightarrow y=1 & \\ -16z=48 \quad \Rightarrow z=-3 & & \end{array}$$

$$\mathbb{L}=\{(2\,|\,1\,|\,-3)\}$$

Gerade den letzten Schritt muss man nicht so ausführlich durchführen. Einfacher geht es, wenn man von der Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) ausgehend die Gleichungen von „unten nach oben“ löst und die erhaltenen Ergebnisse in die darüber liegende Zeile einsetzt.

Bsp.: $\begin{array}{r} x+3y+z=7 \\ 2x+5y-2z=-13 \\ -3x+2y+z=-4 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(3\,|\,-1\,|\,7)\}$

11. Löse folgende Aufgaben mit Hilfe des Gauß´schen Algorithmus!

a) $\begin{array}{r} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=-1 \\ 5x-y+2z=1 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(1\,|\,0\,|\,-2)\}$

b) $\begin{array}{r} 2x-y+3z=-1 \\ x+5y-2z=-4 \\ 3x-2y+z=-5 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(-2\,|\,0\,|\,-1)\}$

c) $\begin{array}{r} 4x+7y+12z=-5 \\ -2x+3y-4z=-4 \\ 2x+y+9z=0 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(\tfrac{1}{2}\,|\,-1\,|\,0)\}$

d) $\begin{array}{r} x+2y+z=-2 \\ 3x-y+2z=0 \\ x+12y-z=4 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(\tfrac{11}{4}\,|\,-\tfrac{1}{4}\,|\,-\tfrac{17}{4})\}$

e) $\begin{array}{r} 2x+y-z-2=0 \\ 3x+2y+z-\tfrac{1}{2}=0 \\ -x-2y-z-4=0 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(\tfrac{9}{4}\,|\,\tfrac{35}{12}\,|\,-\tfrac{5}{12})\}$

f) $\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 4x+9y+16z=0 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(0\,|\,0\,|\,0)\}$

g) $\begin{array}{r} 3x-2y+z=-2 \\ 6x+y-3z=11 \\ 7x-4y+4z=-5 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(1\,|\,2\,|\,-1)\}$

h) $\begin{array}{r} 4x+6y-z=-110 \\ 2x+4y+2z=0 \\ 3x-z=0 \end{array}$ $\mathbb{L}=\{(10\,|\,-20\,|\,30)\}$

i) $\begin{aligned} 10a - 2b + 8c &= -4 \\ 5a + 5b + 7c &= 16 \\ 15a - 6b + 6c &= -6 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(2 \mid 4 \mid -2)\}$

j) $\begin{aligned} 3x - 5y + 6z &= 12 \\ 4x + 2y - z &= -11 \\ -x + 6y &= 2 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(-2 \mid 0 \mid 3)\}$

k) $\begin{aligned} -0{,}5x + 4y - 2z &= 19 \\ 3x + 6z &= 0 \\ 8x + 3y - 4z &= 72 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(6 \mid 4 \mid -3)\}$

l) $\begin{aligned} x &= z \\ y &= -x \\ 2x + 4y - 33z &= -25 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(\tfrac{5}{7} \mid -\tfrac{5}{7} \mid \tfrac{5}{7})\}$

m) $\begin{aligned} a - b + 2c - 2d &= -9 \\ 3b + 4c - d &= 3 \\ 3a - 2b + 3c &= -9 \\ 4a + 2b - c + d &= 9 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(0 \mid 3 \mid -1 \mid 2)\}$

n) $\begin{aligned} 2a - 2b + 5c - 3d &= 3 \\ 4a + 2b - 3c + d &= 5 \\ a + 3b - c &= 4 \\ -4a - 4b + 3c - 2d &= -6 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(1 \mid 1 \mid 0 \mid -1)\}$

o) $\begin{aligned} 3a - c + 2d &= 3 \\ a + 2b - 4c + 5d &= -1 \\ 2a - 3b + 4c &= -9 \\ 0{,}5a - 1{,}5b + 2{,}5c + 4d &= -5 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(2 \mid 3 \mid 1 \mid -1)\}$

Gauß´scher Algorithmus

Bsp.:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -5 \\ -2x + y - z &= 0 \\ 3x + 4y + z &= 7 \end{aligned}$$

Man ordnet nun die Koeffizienten der Unbekannten x, y und z in einer Koeffizientenmatrix A an. Diese wird dann, durch einen vertikalen Strich getrennt, um die konstanten Werte, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen erweitert. Die so entstandene Matrix nennt man dann die erweiterte Koeffizientenmatrix A_{erw} .

$$\underbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix A}} \left| \begin{matrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{matrix} \right.}_{\text{erweiterte Koeffizientenmatrix } A_{erw}}$$

Das Ziel des Algorithmus ist es nun, die Koeffizientenmatrix A auf Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) zu bringen. D.h., dass unterhalb der Diagonalen von links oben nach rechts unten lauter Nullen stehen. Dies geschieht durch entsprechender Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl und anschließender Addition/Subtraktion zweier Zeilen.

$$\begin{array}{ccc|c ll} 1 & -1 & 2 & -5 & \cdot 2 & \cdot 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & + & - \\ 3 & 4 & 1 & 7 & & \\ \hline 1 & -1 & 2 & -5 & & \\ 0 & -1 & 3 & -10 & \cdot 7 & \\ 0 & -7 & 5 & -22 & - & \\ \hline 1 & -1 & 2 & -5 & & \\ 0 & -1 & 3 & -10 & & \\ 0 & 0 & 16 & -48 & & \end{array}$$

Nachdem die Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) der Koeffizientenmatrix erreicht ist, stellt man das Gleichungssystem wieder auf und löst es von „unten nach oben „

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -5 & \qquad & x - 1 - 6 = -5 \Rightarrow x = 2 \\ -y + 3z &= -10 & & -y - 9 = -10 \Rightarrow y = 1 \\ 16z &= -48 & & \Rightarrow z = -3 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{(2|1|-3)\}$$

Gerade den letzten Schritt muss man nicht so ausführlich durchführen. Einfacher geht es, wenn man von der Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) ausgehend die Gleichungen von „unten nach oben“ löst und die erhaltenen Ergebnisse in die darüber liegende Zeile einsetzt.

Aufgaben:

1) $\begin{aligned} 2x+3y+z&=0\\ x+y+z&=-1\\ 5x-y+2z&=1 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(1|0|-2)\}$

2) $\begin{aligned} 2x-y+3z&=-1\\ x+5y-2z&=-4\\ 3x-2y+z&=-5 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(-2|0|1)\}$

3) $\begin{aligned} 4x+7y+12z&=-5\\ -2x+3y-4z&=-4\\ 2x+y+9z&=0 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(\tfrac{1}{2}|-1|0)\}$

4) $\begin{aligned} x+2y+z&=-2\\ 3x-y+2z&=0\\ x+12y-z&=4 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(\tfrac{11}{4}|-\tfrac{1}{4}|-\tfrac{17}{4})\}$

5) $\begin{aligned} 2x+y-z&=2\\ 3x+2y+z&=\tfrac{1}{2}\\ -x-2y-z&=4 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(\tfrac{9}{4}|-\tfrac{35}{12}|-\tfrac{5}{12})\}$

6) $\begin{aligned} x+y+z&=0\\ 2x+3y+4z&=0\\ 4x+9y+16z&=0 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(0|0|0)\}$

7) $\begin{aligned} 3x-2y+z&=-2\\ 6x+y-3z&=11\\ 7x-4y+4z&=-5 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(1|2|-1)\}$

8) $\begin{aligned} 4x+6y-z&=-110\\ 2x+4y+2z&=0\\ 3x-z&=0 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(10|-20|30)\}$

9) $\begin{aligned} 10a-2b+8c&=-4\\ 5a+5b+7c&=16\\ 15a-6b+6c&=-6 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(2|4|-2)\}$

10) $\begin{aligned} 3x-5y+6z&=12\\ 4x+2y-z&=-11\\ -x+6y&=2 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(-2|0|3)\}$

11) $\begin{aligned} -0{,}5x + 4y - 2z &= 19 \\ 3x + 6z &= 0 \\ 8x + 3y - 4z &= 72 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(6 \mid 4 \mid -3)\}$

12) $\begin{aligned} x &= z \\ y &= -x \\ 2x + 4y - 33z &= -25 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(\tfrac{5}{7} \mid -\tfrac{5}{7} \mid \tfrac{5}{7})\}$

13) $\begin{aligned} a - b + 2c - 2d &= -9 \\ 3b + 4c - d &= 3 \\ 3a - 2b + 3c &= -9 \\ 4a + 2b - c + d &= 9 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(0 \mid 3 \mid -1 \mid 2)\}$

14) $\begin{aligned} 2a - 2b + 5c - 3d &= 3 \\ 4a + 2b - 3c + d &= 5 \\ a + 3b - c &= 4 \\ -4a - 4b + 3c - 2d &= -6 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(1 \mid 1 \mid 0 \mid -1)\}$

15) $\begin{aligned} 3a - c + 2d &= 3 \\ a + 2b - 4c + 5d &= -1 \\ 2a - 3b + 4c &= -9 \\ 0{,}5a - 1{,}5b + 2{,}5c + 4d &= -5 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L} = \{(2 \mid 3 \mid 1 \mid -1)\}$

<u>Lösbarkeitskriterien</u>
Wurde eine Matrix A auf Zeilen-Stufen-Form gebracht, so nennt man die Anzahl der Stufen den Rang dieser Matrix.
Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = 3 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = 1$$

Auf gleiche Art und Weise lässt sich auch so der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix bestimmen.

$$A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 2 \\ Rg(A_{erw.}) = 3 \end{cases}$$

$$A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 3 \\ Rg(A_{erw.}) = 3 \end{cases}$$

$$A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 2 \\ Rg(A_{erw.}) = 2 \end{cases}$$

$$A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 1 \\ Rg(A_{erw.}) = 2 \end{cases}$$

Nun gelten folgende Lösbarkeitskriterien:

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn gilt:

$$Rg(A) = Rg(A_{erw.}) = 3$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar $\left(\mathbb{L} = \{\ \}\right)$ wenn gilt:

$$Rg(A) < Rg(A_{erw.})$$

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, wenn gilt:

$$Rg(A) = Rg(A_{erw.}) < 3$$

Weitere Aufgaben: Bestimmen Sie anhand der Lösbarkeitskriterien ob das Gleichungssystem lösbar ist oder nicht. Geben Sie sodann die Lösung an.

16) $$\begin{aligned} 5x-9y+3z&=16\\ 6x-7y-6z&=0\\ 8x+8y-3z&=10 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(2\,|\,0\,|\,2)\}$$

17) $$\begin{aligned} x+4y-3z&=1\\ 2x+y+z&=4\\ 5x-3y+8z&=-3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{\ \}$$

18) $$\begin{aligned} x-y+2z&=1\\ 2x+3y-z&=3\\ 4x+y+3z&=5 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

19) $$\begin{aligned} 2x-y+z&=1\\ 4x+3y-2z&=-1\\ 6x+2y-z&=0 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5}\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

20) $$\begin{aligned} 7x+6y+4z&=1\\ 2x-12y&=0\\ -4x+3y+2z&=23 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\left(-3\,\middle|\,-\tfrac{1}{2}\,\middle|\,\tfrac{25}{4}\right)\right\}$$

21) $$\begin{aligned} 3x-y+4z&=3\\ 6x-2y+8z&=6\\ 1{,}5x-0{,}5y+2z&=1{,}5 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\};\ \mu,\lambda\in\mathbb{R}$$

22) $$\begin{aligned} 6x-5y-4z&=-2\\ -12x+10y+8z&=4\\ 3x-2{,}5y-2z&=-1 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

23) $$\begin{aligned} 6x+5y-10z&=-9\\ 5x-4y+2z&=11\\ 4x-3y+5z&=12 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(1\,|\,-1\,|\,1)\}$$

24) $$\begin{aligned} 8x-4y+z&=7\\ -5x-2y+3z&=21\\ -3x+y-8z&=-56 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(0\,|\,0\,|\,7)\}$$

25) $$\begin{aligned} 8x+6y+12z&=2\\ -16x-4y+8z&=-8\\ 10x+2y+2z&=3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\left(\tfrac{1}{4}\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\,\middle|\,-\tfrac{1}{4}\right)\right\}$$

26)
$$\begin{aligned} 9x+5y+6z&=6 \\ -3x+4y-9z&=-1 \\ 6x+3y+3z&=3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\left(-\tfrac{1}{3}\,|\,1\,|\,\tfrac{2}{3}\right)\right\}$$

27)
$$\begin{aligned} a-c+2d&=9 \\ b-3c+d&=-3 \\ b+2c&=8 \\ 3c-5d&=-11 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\left(4\,|\,2\,|\,3\,|\,4\right)\right\}$$

28)
$$\begin{aligned} x-2y+3z&=-4 \\ 3x+y-5z&=5 \\ 2x-3y+4z&=7 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{\ \}$$

29)
$$\begin{aligned} 2x+3y-4z&=5 \\ x+2y-5z&=6 \\ 4x+5y-2z&=3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}-8\\7\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-7\\6\\1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

30)
$$\begin{aligned} 3x-4y+2z&=4 \\ 3x+16y+4z&=-4 \\ x+2y+z&=0 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{1}{10}\\1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

31)
$$\begin{aligned} 3x-y+z&=1 \\ -2x+4y-z&=-2 \\ x+3y&=-1 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

III. Lineare Gleichungssysteme

§ 1 Additionsverfahren und Gauß´scher Algorithmus

Bsp.: (Jägerlatein) Auf einer Treibjagd wurden Fasane und Hasen erlegt. Insgesamt hatten die erlegten Tiere 27 Köpfe und 92 Füße. Wie viele Fasane und wie viele Hasen wurden erlegt?

Anzahl der Fasane: x
Anzahl der Hasen: y

$$\begin{aligned} &(1)\quad x+\ \ y=27 \qquad \cdot 2 \\ &(2)\quad 2x+4y=92 \\ \hline &\qquad -2y=-38 \ \Rightarrow\ y=19 \\ &\text{in }(1):\ x+19=27 \ \Rightarrow\ x=8 \end{aligned}$$

Additionsverfahren

Bei diesem Verfahren (Additionsverfahren) müssen die beiden Gleichungen so multipliziert werden, dass die Koeffizienten einer Unbekannten in beiden Gleichungen betragsmäßig gleich groß sind. Bei gleichen Vorzeichen werden die beiden Gleichungen subtrahiert und bei ungleichen Vorzeichen werden sie addiert.

Antwort: Es wurden 8 Fasane und 19 Hasen erlegt.

Löse folgende Aufgaben mit Hilfe des Additionsverfahrens

1) $x+y=5$
$4x-3y=-1$
$IL=\{(2|3)\}$

2) $2x-8y=-8$
$3x+4y=20$
$IL=\{(4|2)\}$

3) $7x+3y=12$
$4x-5y=27$
$IL=\{(3|-3)\}$

4) $8x+17y=42$
$2x+19y=40$
$IL=\{(1|2)\}$

5) $3x-5y=0$
$2x+7y=0$
$IL=\{(0|0)\}$

6) $x+4y-4=0$
$7x+6y+5=0$
$IL=\{(-2|1{,}5)\}$

7) $2y+3=3x$
$2x+5y=2$
$IL=\{(1|0)\}$

8) $x-y=a$
$x-5y=-3a$
$IL=\{(2a|a)\}$; $a\in IR$

9) $ax+by=2a$
$\frac{1}{b}x-\frac{1}{a}y=\frac{2}{a}$
$IL=\{(\frac{b}{a}+1|\frac{a}{b}-1)\}$
$a,b\neq 0$

10) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y=6$
$-2x-3y=5$
$IL=\{\ \}$

Dieses Verfahren funktioniert auch bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$\begin{array}{lrl}
(1) & 2x+3y+z=0 & \quad \cdot 5 \\
(2) & x+y+z=-1 & \quad \cdot 2 \quad - \\
(3) & 5x-y+2z=1 & \quad \cdot 2 \\
\hline
(1) & 2x+3y+z=0 & \\
(2)' & y-z=2 & \quad \cdot 17 \\
(3)' & 17y+z=-2 & \quad - \\
\hline
(1) & 2x+3y+z=0 & \quad \Rightarrow x=1 \\
(2)' & y-z=2 & \quad \Rightarrow y=0 \\
(3)'' & -18z=36 & \quad \Rightarrow z=-2
\end{array}$$

$\mathbb{L}=\{(1|0|-2)\}$

Beispiele:

1) $2x-y+3z=-1$
$x+5y-2z=-4$ $\qquad \mathbb{L}=\{(-2|0|1)\}$
$3x-2y+z=-5$

2) $4x+7y+12z=-5$
$-2x+3y-4z=-4$ $\qquad \mathbb{L}=\{(\tfrac{1}{2}|-1|0)\}$
$2x+y+9z=0$

3) $u+2v+w=-2$
$u+12v-w=4$ $\qquad \mathbb{L}=\{(\tfrac{11}{4}|-\tfrac{1}{4}|-\tfrac{17}{4})\}$
$3u-v+2w=0$

Da man bei diesem Verfahren immer die Variablen herumschleppen muss bietet sich ein etwas einfacheres Verfahren an, bei dem die Variablen weggelassen werden.

Gauß´scher Algorithmus

Bsp.:

$$\begin{aligned} x-y+2z&=-5\\ -2x+y-z&=0\\ 3x+4y+z&=7 \end{aligned}$$

Man ordnet nun die Koeffizienten der Unbekannten x, y und z in einer Koeffizientenmatrix A an. Diese wird dann, durch einen vertikalen Strich getrennt, um die konstanten Werte, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen erweitert. Die so entstandene Matrix nennt man dann die erweiterte Koeffizientenmatrix A_{erw} .

$$\underbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 1 \end{array}}_{\text{Koeffizientenmatrix A}}\left|\begin{array}{c} -5\\ 0\\ 7 \end{array}\right.}_{\text{erweiterte Koeffizientenmatrix } A_{erw}}$$

Das Ziel des Algorithmus ist es nun, die Koeffizientenmatrix A auf Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) zu bringen. D.h., dass unterhalb der Diagonalen von links oben nach rechts unten lauter Nullen stehen. Dies geschieht durch entsprechender Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl und anschließender Addition/Subtraktion zweier Zeilen.

$$\begin{array}{ccc|c|l} 1 & -1 & 2 & -5 & \cdot 2 \quad \cdot 3\\ -2 & 1 & -1 & 0 & + \\ 3 & 4 & 1 & 7 & - \\ \hline 1 & -1 & 2 & -5 & \\ 0 & -1 & 3 & -10 & \cdot 7\\ 0 & -7 & 5 & -22 & - \\ \hline 1 & -1 & 2 & -5 & \\ 0 & -1 & 3 & -10 & \\ 0 & 0 & 16 & -48 & \end{array}$$

Nachdem die Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) der Koeffizientenmatrix erreicht ist, stellt man das Gleichungssystem wieder auf und löst es von „unten nach oben „

$$x-y+2z=-5 \qquad\qquad x-1-6=-5 \Rightarrow x=2$$

$$-y+3z=-10 \qquad\qquad -y-9=-10 \Rightarrow y=1$$

$$16z=-48 \quad \Rightarrow z=-3$$

$$\mathbb{L}=\{(2|1|-3)\}$$

Gerade den letzten Schritt muss man nicht so ausführlich durchführen. Einfacher geht es, wenn man von der Dreiecksform (Zeilen-Stufen-Form) ausgehend die Gleichungen von „unten nach oben“ löst und die erhaltenen Ergebnisse in die darüber liegende Zeile einsetzt.

Aufgaben:

1) $\begin{aligned} 2x+3y+z&=0 \\ x+y+z&=-1 \\ 5x-y+2z&=1 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(1|0|-2)\}$

2) $\begin{aligned} 2x-y+3z&=-1 \\ x+5y-2z&=-4 \\ 3x-2y+z&=-5 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(-2|0|1)\}$

3) $\begin{aligned} 4x+7y+12z&=-5 \\ -2x+3y-4z&=-4 \\ 2x+y+9z&=0 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(\tfrac{1}{2}|-1|0)\}$

4) $\begin{aligned} x+2y+z&=-2 \\ 3x-y+2z&=0 \\ x+12y-z&=4 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(\tfrac{11}{4}|-\tfrac{1}{4}|-\tfrac{17}{4})\}$

5) $\begin{aligned} 2x+y-z&=2 \\ 3x+2y+z&=\tfrac{1}{2} \\ -x-2y-z&=4 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(\tfrac{9}{4}|-\tfrac{35}{12}|-\tfrac{5}{12})\}$

6) $\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ 2x+3y+4z&=0 \\ 4x+9y+16z&=0 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(0|0|0)\}$

7) $\begin{aligned} 3x-2y+z&=-2 \\ 6x+y-3z&=11 \\ 7x-4y+4z&=-5 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(1|2|-1)\}$

8) $\begin{aligned} 4x+6y-z&=-110 \\ 2x+4y+2z&=0 \\ 3x-z&=0 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(10|-20|30)\}$

9) $\begin{aligned} 10a-2b+8c&=-4 \\ 5a+5b+7c&=16 \\ 15a-6b+6c&=-6 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(2|4|-2)\}$

10) $\begin{aligned} 3x-5y+6z&=12 \\ 4x+2y-z&=-11 \\ -x+6y&=2 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(-2|0|3)\}$

11) $\begin{aligned} -0{,}5x+4y-2z&=19\\ 3x+6z&=0\\ 8x+3y-4z&=72 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(6\,|\,4\,|\,-3)\}$

12) $\begin{aligned} x&=z\\ y&=-x\\ 2x+4y-33z&=-25 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(\tfrac{5}{7}\,|\,-\tfrac{5}{7}\,|\,\tfrac{5}{7})\}$

13) $\begin{aligned} a-b+2c-2d&=-9\\ 3b+4c-d&=3\\ 3a-2b+3c&=-9\\ 4a+2b-c+d&=9 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(0\,|\,3\,|\,-1\,|\,2)\}$

14) $\begin{aligned} 2a-2b+5c-3d&=3\\ 4a+2b-3c+d&=5\\ a+3b-c&=4\\ -4a-4b+3c-2d&=-6 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(1\,|\,1\,|\,0\,|\,-1)\}$

15) $\begin{aligned} 3a-c+2d&=3\\ a+2b-4c+5d&=-1\\ 2a-3b+4c&=-9\\ 0{,}5a-1{,}5b+2{,}5c+4d&=-5 \end{aligned}$ $\quad \mathbb{L}=\{(2\,|\,3\,|\,1\,|\,-1)\}$

Lösbarkeitskriterien

Wurde eine Matrix A auf Zeilen-Stufen-Form gebracht, so nennt man die Anzahl der Stufen den Rang dieser Matrix.

Beispiele:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&1\\0&0&4\end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A)=3 \qquad A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A)=2$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A)=2 \qquad A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A)=1$$

Auf gleiche Art und Weise lässt sich auch so der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix bestimmen.

$$A_{erw}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&6&0\\0&2&0&1\\0&0&0&2\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}Rg(A)=2\\ Rg(A_{erw.})=3\end{cases}$$

$$A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 3 \\ Rg(A_{erw.}) = 3 \end{cases}$$

$$A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 2 \\ Rg(A_{erw.}) = 2 \end{cases}$$

$$A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 1 \\ Rg(A_{erw.}) = 2 \end{cases}$$

Nun gelten folgende Lösbarkeitskriterien:

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn gilt:

$$Rg(A) = Rg(A_{erw.}) = 3$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar $\left(\mathbb{L} = \{\ \}\right)$ wenn gilt:

$$Rg(A) < Rg(A_{erw.})$$

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, wenn gilt:

$$Rg(A) = Rg(A_{erw.}) < 3$$

Weitere Aufgaben: Bestimmen Sie anhand der Lösbarkeitskriterien ob das Gleichungssystem lösbar ist oder nicht. Geben Sie sodann die Lösung an.

16) $$\begin{aligned} 5x-9y+3z&=16\\ 6x-7y-6z&=0\\ 8x+8y-3z&=10 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(2\,|\,0\,|\,2)\}$$

17) $$\begin{aligned} x+4y-3z&=1\\ 2x+y+z&=4\\ 5x-3y+8z&=-3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{\ \}$$

18) $$\begin{aligned} x-y+2z&=1\\ 2x+3y-z&=3\\ 4x+y+3z&=5 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

19) $$\begin{aligned} 2x-y+z&=1\\ 4x+3y-2z&=-1\\ 6x+2y-z&=0 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5}\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

20) $$\begin{aligned} 7x+6y+4z&=1\\ 2x-12y&=0\\ -4x+3y+2z&=23 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\left(-3\,\middle|\,-\tfrac{1}{2}\,\middle|\,\tfrac{25}{4}\right)\right\}$$

21) $$\begin{aligned} 3x-y+4z&=3\\ 6x-2y+8z&=6\\ 1{,}5x-0{,}5y+2z&=1{,}5 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\};\ \mu,\lambda\in\mathbb{R}$$

22) $$\begin{aligned} 6x-5y-4z&=-2\\ -12x+10y+8z&=4\\ 3x-2{,}5y-2z&=-1 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

23) $$\begin{aligned} 6x+5y-10z&=-9\\ 5x-4y+2z&=11\\ 4x-3y+5z&=12 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(1\,|\,-1\,|\,1)\}$$

24) $$\begin{aligned} 8x-4y+z&=7\\ -5x-2y+3z&=21\\ -3x+y-8z&=-56 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(0\,|\,0\,|\,7)\}$$

25) $$\begin{aligned} 8x+6y+12z&=2\\ -16x-4y+8z&=-8\\ 10x+2y+2z&=3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\left(\tfrac{1}{4}\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\,\middle|\,-\tfrac{1}{4}\right)\right\}$$

26)
$$\begin{aligned} 9x+5y+6z&=6\\ -3x+4y-9z&=-1\\ 6x+3y+3z&=3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\left(-\tfrac{1}{3}\,|\,1\,|\,\tfrac{2}{3}\right)\right\}$$

27)
$$\begin{aligned} a-c+2d&=9\\ b-3c+d&=-3\\ b+2c&=8\\ 3c-5d&=-11 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\left(4\,|\,2\,|\,3\,|\,4\right)\right\}$$

28)
$$\begin{aligned} x-2y+3z&=-4\\ 3x+y-5z&=5\\ 2x-3y+4z&=7 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{\ \}$$

29)
$$\begin{aligned} 2x+3y-4z&=5\\ x+2y-5z&=6\\ 4x+5y-2z&=3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}-8\\7\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-7\\6\\1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

30)
$$\begin{aligned} 3x-4y+2z&=4\\ 3x+16y+4z&=-4\\ x+2y+z&=0 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{1}{10}\\1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

31)
$$\begin{aligned} 3x-y+z&=1\\ -2x+4y-z&=-2\\ x+3y&=-1 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Überbestimmte Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem ist überbestimmt, wenn die Anzahl der Gleichungen größer als die Anzahl der Unbekannten ist.
In diesem Fall bestimmt man die Lösung mit dem Gaußalgorithmus und überprüft anschließend, ob die Lösung allen Gleichungen gerecht wird!
Bsp.:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -4 \\ 0{,}5x - 6y &= -1 \\ -3x + 5y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -4 \\ 0{,}5 & -6 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & -4 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ \hline 2 & 3 & -4 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \Rightarrow x = -2 \\ \Rightarrow y = 0 \\ \\ \end{array}$$

Setzt man die Lösung in jede der Gleichungen ein, so erhält man nur wahre Aussagen (erfüllen jede Gleichung).

$$\mathbb{L} = \{(-2 \mid 0)\}$$

Aufgaben:

28) $$\begin{aligned} x - 7y &= 22 \\ 3x + 5y &= -12 \\ 1{,}5x + 3y &= 4 \end{aligned} \qquad \mathbb{L} = \{\ \}$$

29) $$\begin{aligned} 3x + y &= 3 \\ x - y &= -1 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \qquad \mathbb{L} = \{(0{,}5 \mid 1{,}5)\}$$

30) $$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 4 \\ 2x - 3z &= -2 \\ -x + 2y - 3z &= -6 \\ y + z &= 3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L} = \{(2 \mid 1 \mid 2)\}$$

31) $$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 4 \\ y + z &= 3 \\ x - y + 3z &= 7 \\ x - 4y &= -2 \end{aligned} \qquad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

32)

Unterbestimmte Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem ist unterbestimmt, wenn die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist.

Um die Lösung zu finden, wendet man zunächst den Gauß-Algorithmus an und bringt die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilen-Stufen-Form. Dann löst man das entstandene System wie eine System, das unendlich viele Lösungen liefert. Man setzt eine Unbekannte gleich λ und löst dann nach den verbleibenden Unbekannten auf.

Bsp.:

$$\begin{array}{l} 5x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrl} 5 & 2 & -1 & 1 & \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \\ 5 & 2 & -1 & 1 & \\ 0 & -1 & -12 & -13 & \text{Wähle } z=\lambda\in\mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow x=-5+5\lambda \\ \Rightarrow y=13-12\lambda \end{array}$$

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}-5\\13\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\-12\\1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Aufgaben:

33) $\begin{array}{r} x+y-3z=3 \\ x-y+z=1 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$

34) $\begin{array}{r} 6x-2y+3z=9 \\ 2x-\frac{2}{3}y+z=0 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\{\ \}$

35) $\begin{array}{r} -x-2y+5z=0 \\ 3x+7y-3z=0{,}5 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}29\\-12\\1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda\in\mathbb{R}$

36) $\begin{array}{r} 2a+b-c+3d=0 \\ a-3b-d=3 \end{array}$ $\qquad \mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\6\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\7\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\5\\1\end{pmatrix}\right\};\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Gleichungssysteme mit Parameter

Aufgabe 1: Lösen Sie für $a \in \mathbb{R}$ folgendes Gleichungssystem mit Hilfe des Additionsverfahrens.

a) $3ax - 2y = 5$ $\quad a \neq 0: \quad \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{a} \mid -1\right)\right\}$

$\quad ax - y = 2$ $\quad a = 0: \quad \mathbb{L} = \{\,\}$

b) $-2ax + y = 3$ $\quad a \neq 0: \quad \mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{5}{a} \mid -7\right)\right\}$

$\quad 3ax - 2y = -1$ $\quad a = 0: \quad \mathbb{L} = \{\,\}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie für welches $a \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem keine Lösung hat.

$$3x + 2y = -a$$
$$6x + 2ay = 0$$

$a_1 = 0$

Aufgabe 3: Gegeben ist folgendes Gleichungssystem

$$2x + 4z = 2 + 3y$$
$$3y = 2x + a^2 z$$

mit $a \in \mathbb{R}$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösung?
b) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems für $a = 0$!

Aufgabe 4: Begründen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ folgendes Gleichungssystem keine Lösung hat.

$$2x + y + az = 0$$
$$-y + a^2 z = 1$$
$$2x + 2y = 1$$

$a_1 = 0; \quad a_2 = 1$

Aufgabe 5: Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem

$$7x + 3 = -4z$$
$$3x + ky - 4 = -5z \qquad k \in \mathbb{R}$$
$$3(y - z) = 2x + 5$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystem für $k = 1$. $\quad \mathbb{L} = \{(-1; 2; 1)\}$
b) Für welches $k \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösung? $\quad k = -5\frac{4}{13}$

Aufgabe 6: Gegeben ist folgendes Gleichungssystem

$$2x + y = 3z$$
$$x + 2y + az = 1 \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$
$$3x = 1 + a^2 z$$

a) Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem keine Lösung?
   $a_1 = -2; \quad a_2 = 3$
b) Welche Lösung hat das Gleichungssystem für $a = 0$?
   $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{1}{3}\right)\right\}$

Aufgabe 7: Gegeben ist folgendes Gleichungssystem

$$x = 2 - az$$
$$y - z = 0 \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$
$$ax + a = 3 - y$$

a) Für welchen Wert von a hat das Gleichungssystem keine Lösung?

$a_1 = -1$ (Für $a_2 = 1$ gibt es unendlich viele Lösungen)

b) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems für $a = 1$.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};\ \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Bestimmen Sie allgemein die Lösung für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\tfrac{2-a}{a+1} \,\middle|\, \tfrac{3}{a+1} \,\middle|\, \tfrac{3}{a+1} \right) \right\}$$

Aufgabe 8: Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$2y + 2z = 5 + x$$
$$x + y + 4z = a - 5 \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$
$$7z = 4 - 4y + 2x$$

Aufgabe 9: Gegeben ist folgendes Gleichungssystem

$$2x + 3y + m^2 z = 0$$
$$2y = 1 + x$$
$$3x + mz = -y - 1$$

a) Für welche $m \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?
b) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems für $m = 1$

Aufgabe 10: Gegeben ist folgendes Gleichungssystem

$$x + y - z = 0$$
$$3x + 3y + mz = 1$$
$$mx + y = 1$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Determinantenmethode, für welche $m \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem keine Lösung hat.

Aufgabe 11: Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$x + y + z = 1$$
$$2x + 3y + mz = -1 \qquad \text{mit } m \in \mathbb{R}$$
$$4x + 9y + m^2 z = 1$$

a) Für welche Werte von m hat das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung?

$m_1 = 2;\quad m_2 = 3$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem für $m = -1$.

$\mathbb{L} = \{(0 | 0 | 1)\}$

Aufgabe 12: Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + my + m^2z &= 1 \\ x - 2y + 4z &= 0 \qquad \text{mit } m \in \mathbb{R} \\ x - 3y + 9z &= 1 \end{aligned}$$

Für welche Werte von m hat das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung?

$m_1 = -3 \quad \rightarrow$ keine eindeutige Lsg.

$m_2 = -2 \quad \rightarrow \quad \infty$ viele Lsgen.

Aufgabe 13: Bestimme Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems!

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} -x - 2y + 5z &= 0 \\ 3x + 7y - 3z &= 0{,}5 \end{aligned}$

Weitere Aufgaben

$$\begin{aligned} x - y + a^2z &= 2 \\ 2y + z &= 1 \\ x - 3y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + az &= 1 \\ 4y + a^2z &= -2 \\ 2x + 7y + 3az &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x + 3 &= -4z \\ 3x + ky - 4 &= -5z \qquad k \in \mathbb{R} \\ 3(y - z) &= 2x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - ay - az &= 1 \\ 3x - 4y - 3z &= 1 \qquad a \in \mathbb{R} \\ 4x + 3y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= a \\ x + 3y + az &= 2 \qquad a \in \mathbb{R} \\ x + ay + z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + az &= 2 \\ y - z &= 0 \qquad a \in \mathbb{R} \\ ax + y &= 3 - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=a \\ x+(1+a)y+z&=2a \quad a\in\mathbb{R} \\ x+y+(1+a)z&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ 2x-3y&=2 \quad a\in\mathbb{R} \qquad\qquad a=\tfrac{3}{5} \\ x+az&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ 2x+3y+az&=-1 \quad a\in\mathbb{R} \\ 4x+8y+a^2z&=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax-2y&=a^2 \\ 2ax+3y&=9a^2 \end{aligned} \quad a\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ 2x-y+z&=3 \quad a\in\mathbb{R} \\ 3x+2y-2z&=a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ 2y+z&=a \quad a\in\mathbb{R} \\ 2x+y+az&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ 2x+y+4z&=0 \quad a\in\mathbb{R} \\ 5x-ay+z&=a \end{aligned}$$