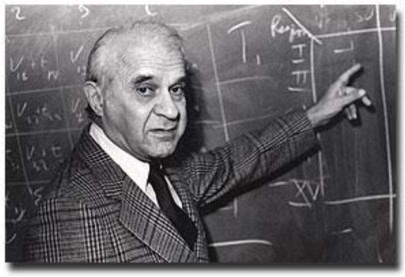
§ 16 Das Leontief-Modell

16.1 Wassily Leontief



* 5. August 1905 in München
† 5. Februar 1999 in New York

Wassily Leontief wuchs in St. Petersburg auf wo er 1921 das Studium der Philosophie und Soziologie begann. Später studierte er noch Wirtschaftswissenschaften und erhielt 1924 seinen Abschluss.
Anschließend ging er an die Friedrich-Wilhelm-Universität nach Berlin und erhielt für seine Dissertation „Wirtschaft als Kreislauf" die Doktorwürde.
1931 siedelte er in die USA über. 1938 wird er amerikanischer Staatsbürger und erhielt 1939 eine Berufung als außerordentlicher Professor nach Harvard.
Leontief entwickelte die Input-Output-Analyse. In dieser stellt er die Güter- und Leistungsströme einer Volkswirtschaft mit statistischen Zahlen in Tabellenform dar.
1973 erhielt er für seine Arbeiten den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

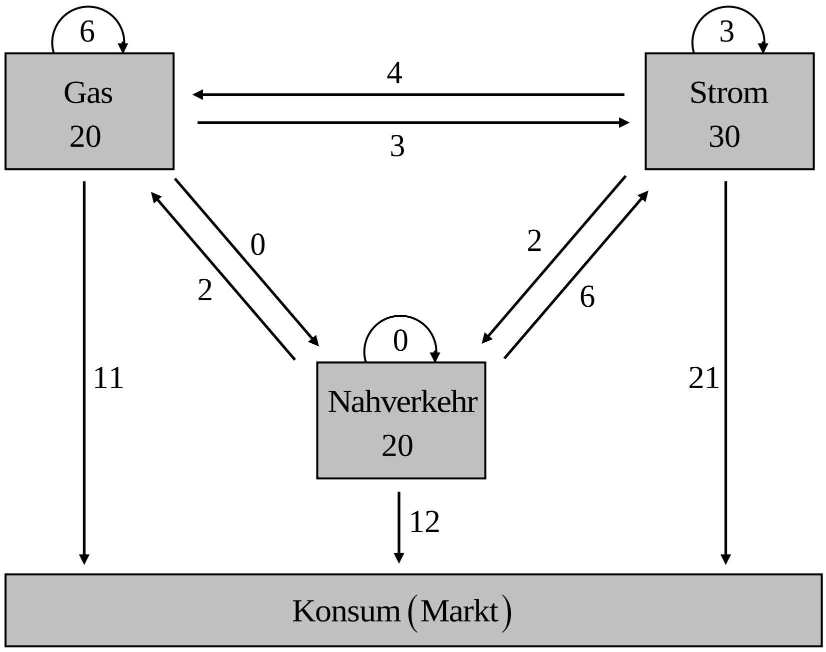
16.2 Beschreibung des Leontiefs-Modells

An einem einfachen Beispiel sollen die prinzipiellen Zusammenhänge realer Produktionsprozesse beschrieben werden.

In einem Landkreis liegt die Energieversorgung in Form von Gas (G) und Strom (S) sowie der öffentliche Nahverkehr (V) in den Händen der Stadtwerke der Kreisstadt. Die Energieträger Gas und Strom und die Dienstleistung Nahverkehr werden nicht nur an den Endverbraucher abgegeben. Es soll weiter berücksichtigt werden, dass auch jeder der Teilbetriebe Güter benötigt, die von ihm selbst oder einem der anderen Betriebe produziert werden.

16.2.1 Das Verflechtungsdiagramm

In der untenstehenden Abbildung (Verflechtungsdiagramm) sind die wechselseitige Beeinflussung der einzelnen Teilbetriebe untereinander, die Abgabe der einzelnen Teilbetriebe an die Endverbraucher sowie die Gesamtproduktion für den Zeitraum einer Woche in Werteeinheiten (WE) dargestellt.



16.2.2 Darstellung als Tabelle

Das Verflechtungsdiagramm kann man nun wieder in ein Tabelle übertragen, die dann so aussieht:

	von \ an	Abgabe				
		Gas	Strom	Nahverkehr	Markt	Gesamt
Herstellung	Gas	6	3	0	11	20
	Strom	4	3	2	21	30
	Nahverkehr	2	6	0	12	20

Die Zahlen in den grünen Zellen beschreiben die Wechselwirkung der jeweiligen Bereiche (Sektoren) untereinander. Sie werden zur ***Verflechtungsmatrix*** zusammengefasst.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen in den roten Zellen beschreiben den Endverbrauch (***externe Nachfrage***). Sie werden zum ***Konsumvektor***, ***Nachfragevektor*** oder auch ***Marktvektor*** zusammengefasst.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Seine Koordinaten geben die Abgabe (Output) des jeweiligen Bereichs an den Markt an.
Da eine Erhöhung der innerbetrieblichen Produktion zu einer erhöhten Abgabe an den Markt führt muss es zwischen den Koeffizienten der Verflechtungsmatrix und den Koordinaten des Marktvektors einen gewissen Zusammenhang geben!

Die Zahlen in den blauen Zellen geben die Produktionszahlen der einzelnen Bereiche an, er wird deshalb auch ***Produktionsvektor*** genannt.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Seine Koordinaten erhält man aus der Summe der Zahlen in der entsprechende Zeile.

$$20 = 6 + 3 + 0 + 11$$
$$30 = 4 + 3 + 2 + 21$$
$$20 = 2 + 6 + 0 + 12$$

In allgemeiner Notation hat eine Verflechtungstabelle folgendes Aussehen:

Output →

Input ↓

von \ an	Sektor 1	Sektor 2	Sektor 3	Markt	Gesamt
Sektor 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
Sektor 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
Sektor 3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_2

Verflechtungsmatrix

$$A \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Marktvektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor

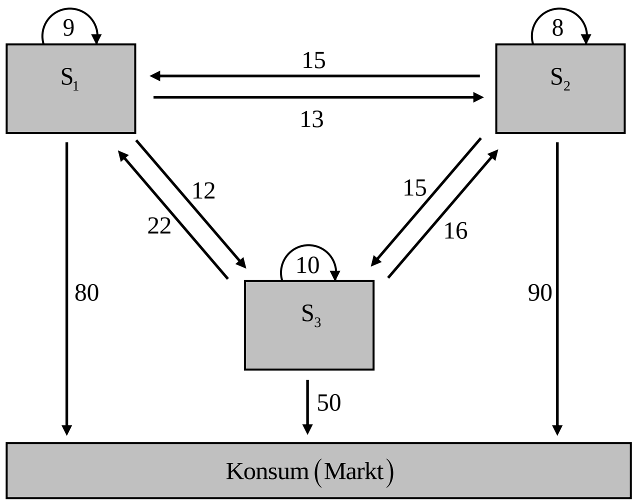
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1$$
$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2$$
$$x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3$$

Aufgaben

1.0 Die gegenseitige Verflechtung dreier Sektoren S_1, S_2 und S_3 einer Volkswirtschaft sind gemäß dem folgenden Verflechtungsdiagramm untereinander mit dem Markt verflochten.



1.1 Wie viele Einheiten werden von den einzelnen Sektoren insgesamt produziert?

1.2 Erstellen Sie eine vollständige Verflechtungstabelle mit Input, Output, Marktabgabe und Gesamtproduktion.

2.0 Die Teilbetriebe A, B und C einer Fabrik sind untereinander und mit dem Markt verflochten. Die Verflechtung wird durch folgende Tabelle beschrieben.

Output →

Input ↓

von \ an	A	B	C	Markt	Gesamt
A	12	a	0	18	35
B	10	5	8	b	48
C	15	20	10	20	c

2.1 Bestimmen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle.
2.2 Stellen Sie die Verflechtung der Betriebe untereinander und mit dem Markt in Form eines Verflechtungsdiagramms dar.

16.2.3 Übergang zur technologischen Matrix - Inputmatrix

Verändert sich die externe Nachfrage (der Nachfragevektor) $\vec{y}$, so muss die Produktion (der Produktionsvektor) $\vec{x}$ diesen Veränderungen so angepasst werden, dass die Nachfrage auch erfüllt werden kann und sich das „System" dabei selbst erhält.
Somit wird es wohl eine Beziehung zwischen dem Konsumvektor $\vec{y}$ und dem Produktionsvektor $\vec{x}$ geben.
Wir wissen, dass sich der Produktionsvektor wie folgt berechnet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix}$$

und durch etwas Umformung erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und jetzt den letzten Term noch etwas umgeformt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Die Matrix T heißt ***technologische Matrix*** oder ***Input-Matrix***. Sie gibt den für den Produktionsprozess notwendigen Input an. Die Koeffizienten von T werden auch als ***Produktionskoeffizienten*** bezeichnet.
Die Elemente der Matrix T geben an, wie viele Einheiten von einem Sektor für jede Einheit eines anderen Sektors bereitzustellen sind, damit der wechselseitige Bedarf gedeckt wird.

$\frac{x_{23}}{x_3}$: Dieser Koeffizient gibt an, wie viele Einheiten aus dem Sektor 2 benötigt werden, um einen Einheit aus dem Sektor 3 zu erzeugen.

Zurück zu unserem ursprünglichen Beispiel!

Verflechtungsmatrix / Produktionsvektor

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Dann erhält man für die Input-Matrix:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{6}{20} & \frac{3}{30} & 0 \\ \frac{4}{20} & \frac{3}{30} & \frac{2}{20} \\ \frac{2}{20} & \frac{6}{30} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Wert 0,2 in der 2. Zeile der 1. Spalte sagt nun aus, dass 0,2 Einheiten Strom benötigt werden, um eine Einheit Gas zu erzeugen.

Aufgaben

3.0 Drei Sektoren einer Volkswirtschaft sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.
Die gegenseitige Verflechtung und die Gesamtproduktion werden durch folgende Tabelle beschrieben.

von \ an	S_1	S_2	S_3	Gesamt
S_1	50	25	0	200
S_2	15	20	30	100
S_3	45	0	15	150

3.1 Berechnen Sie den Konsumvektor.

3.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix.

4.0 Drei Sektoren einer Volkswirtschaft sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.
Die Input-Matrix T, der Produktionsvektor $\vec{x}$ und der Konsumvektor $\vec{y}$ sind gegeben durch:

$$T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ a & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 60 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ c \end{pmatrix}$$

4.1 Erläutern Sie die Bedeutung der Koordinaten a, b und c.

16.2.4 Grundgleichung zum Leontief-Modell

Zwischen dem Konsumvektor $\vec{y}$, dem Produktionsvektor $\vec{x}$ und der Input-Matrix T besteht, wie wir oben schon gesehen haben, ein Zusammenhang:

$$\vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Nun formt man diese Gleichung ein klein wenig um erhält zunächst:

$$\vec{x} - T \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

Ersetzt man den Term $\vec{x}$ mit $E \cdot \vec{x}$ (da ja $E \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt), so erhält man:

$$E \cdot \vec{x} - T \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

Klammert man noch den Vektor $\vec{x}$ aus so erhält man schließlich die Grundgleichung zum Leontief-Modell:

$$\boxed{(E - T) \cdot \vec{x} = \vec{y}}$$

Diese Vektorgleichung stellt somit mit Hilfe der Input-Matrix T eine Beziehung her zwischen dem Produktionsvektor $\vec{x}$ und dem Konsumvektor $\vec{y}$.

Eine externe Nachfrage $\vec{y}$ kann genau dann erfüllt werden, wenn das Gleichungssystem mit den gesuchten Koordinaten x_1, x_2 und x_3 des Produktionsvektors $\vec{x}$ lösbar ist und die Lösungen sämtlich positiv sind.

<u>Bemerkung</u>: Beim Leontief-Modell geht man davon aus, dass sich die ökonomische Struktur auch in dem nächsten zugrunde liegenden Zeitraum nicht ändert. Dies bedeutet, dass die Input-Matrix T als zeitlich konstant angesehen werden kann.

Aufgaben

5.0 Drei Teilbereiche A, B und C eines Werks sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Die Input-Matrix ist

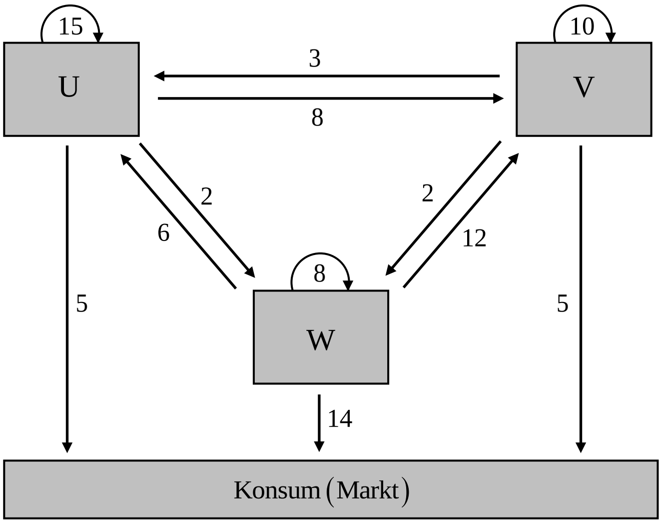
$$T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,25 & 0,1 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Für den nächsten Zeitraum können in den einzelnen Betrieben Mengeneinheiten hergestellt werden, die gegeben sind durch den Produktionsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

5.1 Ermitteln Sie, welche Nachfrage in dem Produktionsraum befriedigt werden kann?

6.0 Die drei Teilbetriebe eines Industrieunternehmens sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.
Das folgende Diagramm zeigt die gegenseitige Verflechtung der einzelnen Teilbetriebe und die Gesamtproduktion



6.1 Erstellen Sie eine Verflechtungstabelle. Geben Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$ und die Verflechtungsmatrix A an

6.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix T.

6.3 Zu einem früheren Zeitpunkt betrug der Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1,5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

7.0 Drei Werke W_1, W_2 und W_3 einer Firma sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Die gegenseitigen und für den Markt erbrachten Leistungen enthält die folgende Tabelle.

von \ an	W_1	W_2	W_3	Gesamt
W_1	0	50	15	335
W_2	80	0	45	125
W_3	40	25	0	85

7.1 Erläutern Sie, welche besondere Form die Verflechtungstabelle besitzt.

7.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix.

7.3 Berechnen Sie den Vektor $\vec{x}$ für den Nachfragevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{pmatrix}$.