§ 15 Matrizenrechnung

15.1 Matrix als Zahlenschema

Eine Internetfirma verkauft über einen eigenen Shop Digitalkameras. Es wird jeweils nur das Topmodel der Firmen Canon, Nikon und Sony angeboten. Verkauft wird in die Länder Deutschland, Österreich, Schweiz und Resteuropa. Die folgenden Tabelle zeigt den Lieferumfang für den Monat Januar.

	Canon	Nikon	Sony
Deutschland	55	45	25
Österreich	40	35	35
Schweiz	30	30	20
Resteuropa	60	40	30

Für weitere Berechnungen mit dem Computer sind nur die Verkaufszahlen von Interesse. Verzichtet man auf die Angabe des Produkt und des Ziellandes und konzentriert sich nur auf das Wesentlich, hier die Zahlen, dann erhält man eine Kurzform des Schemas:

$$J = \begin{pmatrix} 55 & 45 & 25 \\ 40 & 35 & 35 \\ 30 & 30 & 20 \\ 60 & 40 & 30 \end{pmatrix}$$

Ein solches Zahlenschema bezeichnet man als <u>Matrix</u>. Die obige Matrix besteht aus 4 Zeilen und 3 Spalten. Man bezeichnet sie daher als $(4\times 3)-\text{Matrix}$.

<u>Allgemein gilt</u>:
Ein Zahlenschema A aus Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit m Zeilen und n Spalten heißt $(m\times n)-\text{Matrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ein Matrix heißt quadratisch, wenn sie genau so viele Zeilen wie Spalten besitzt, d.h. wenn gilt: $m = n$

In der Matrix J unseres Beispiels gilt: $a_{32} = 30$ ...

15.2 Rechenregeln für Matrizen

Die Verkaufzahlen der verschiedenen Kameratypen für die Länder ist in den Monaten Januar bis November gleich geblieben. Um nun zu berechnen, wie viele Kameras der einzelnen Firmen in die einzelnen Länder letztendlich verkauft wurden, muss die Matrix J mit der Anzahl der Monate multiplizieren.

$$11\cdot J = 11\cdot\begin{pmatrix} 55 & 45 & 25 \\ 40 & 35 & 35 \\ 30 & 30 & 20 \\ 60 & 40 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\cdot 55 & 11\cdot 45 & 11\cdot 25 \\ 11\cdot 40 & 11\cdot 35 & 11\cdot 35 \\ 11\cdot 30 & 11\cdot 30 & 11\cdot 20 \\ 11\cdot 60 & 11\cdot 40 & 11\cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 605 & 495 & 275 \\ 440 & 385 & 385 \\ 330 & 330 & 220 \\ 660 & 440 & 330 \end{pmatrix}$$

<u>Multiplikation einer reellen Zahl mit einer Matrix</u>:

Eine $(m\times n)-$Matrix $A=(a_{ij})$ wird mit einer reellen Zahl λ multipliziert, indem man alle Matrixelemente mit der Zahl λ multipliziert.

$$\lambda\cdot A = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Im Dezember hat sich das Kaufverhalten der Internetkunden aufgrund des Weihnachtsgeschäfts verändert. Für diesen Monat erhält man nun die Verkaufsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 95 & 60 & 40 \\ 50 & 40 & 45 \\ 40 & 55 & 40 \\ 100 & 70 & 55 \end{pmatrix}$$

Um nun zu berechnen, wie viele Kameras der einzelnen Firmen in die einzelnen Länder im gesamten Jahr verkauft wurden muss man obige Matrix $(11\cdot J)$, mit der Matrix D addieren.

$$\begin{pmatrix} 605 & 495 & 275 \\ 440 & 385 & 385 \\ 330 & 330 & 220 \\ 660 & 440 & 330 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 95 & 60 & 40 \\ 50 & 40 & 45 \\ 40 & 55 & 40 \\ 100 & 70 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 & 555 & 315 \\ 490 & 425 & 430 \\ 370 & 385 & 260 \\ 760 & 510 & 385 \end{pmatrix}$$

<u>Addition zweier Matrizen</u>:

Zwei $(m\times n)-$Matrizen $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ werden addiert, indem man die Matrizenelemente mit gleichem Index addiert.

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

- Die beiden Matrizen, die addiert werden sollen, müssen vom gleichen Typ sein. D.h. die Anzahl ihrer Zeilen und Spalten muss übereinstimmen.
- Die Matrizenaddition ist kommutativ und assoziativ. Also gilt:

$$A+B=B+A \quad \text{und} \quad A+(B+C)=(A+B)+C$$

- Die Differenz zweier Matrizen berechnet man in gleicher Weise, nämlich elementweise.

Aufgaben:

1.0 Gegeben sind die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Berechnen Sie

$3\cdot A$

$2\cdot A+5\cdot B$

$C-2\cdot A+B$

$C-2\cdot(A+B)$

$3\cdot(A+B)-2\cdot C$

15.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Eine Firma produziert Türen, Fenster und Vordächer. Dabei durchlaufen diese Produkte während ihrer Herstellung drei verschiedene Werkstätten (Schreinerei, Schlosserei, Glaserei). Je nach Produkt benötigen die einzelnen Werkstätten unterschiedlich lange zur Herstellung eines dieser Produkte.
Der entsprechende Zeitbedarf je Produkt und Werkstatt wird durch folgende Tabelle wiedergegeben.

	Tür	Fenster	Vordach
Schreinerei	9	6	0
Schlosserei	2	3	7
Glaserei	0	2	1

Eine Tür befindest sich also 9 Stunden in der Schreinerei und 2 Stunden in der Schlosserei. Da die Tür kein Fenster hat ist es somit nicht in der Glaserei.
...

Jemand der ein Haus gebaut hat bestellt bei dieser Firma nun 8 Türen, 15 Fenster und 2 Vordächer.

Eine solche Bestellung wird oft auch mithilfe eines sogenannten Bestellvektors $\vec{b}$ beschrieben. Für diesen gilt:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zur besseren Planung bezüglich der Auslastung der einzelnen Werkstätten ist es nun wichtig zu wissen, wie lange die einzelnen Werkstätten für diesen Auftrag benötigen.

Schreinerei: $9\cdot 8+6\cdot 15+0\cdot 2=162$

Schlosserei: $2\cdot 8+3\cdot 15+7\cdot 2=75$

Glaserei: $0\cdot 8+2\cdot 15+1\cdot 2=32$

Dieses Ergebnis erhält man wenn die Matrix A (gegeben durch obige Tabelle) mit dem Bestellvektor $\vec{b}$ multipliziert.

$$A\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\cdot 8+6\cdot 15+0\cdot 2 \\ 2\cdot 8+3\cdot 15+7\cdot 2 \\ 0\cdot 8+2\cdot 15+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162 \\ 75 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 162 \\ 75 \\ 32 \end{pmatrix}$ nennt man den Ergebnisvektor. Er sagt aus, dass die Schreinerei 162 Stunden, die Schlosserei 75 Stunden und die Glaserei 32 Stunden für den Auftrag benötigt.

<u>Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor</u>:
Eine $(m\times n)-$Matrix $A=(a_{ij})$ wird mit einem Vektor $\vec{b}$ (mit n Koordinaten) multipliziert, indem man jede Zeile der Matrix A mit dem Vektor $\vec{b}$ multipliziert.

$$A\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_1 + a_{12}\cdot b_2 + \dots + a_{1n}\cdot b_n \\ a_{21}\cdot b_1 + a_{22}\cdot b_2 + \dots + a_{2n}\cdot b_n \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot b_1 + a_{m2}\cdot b_2 + \dots + a_{mn}\cdot b_n \end{pmatrix}$$

Das Produkt $A\cdot\vec{b}$ ist ein Vektor mit m Koordinaten.

Bemerkungen:

- Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor $\vec{b}$ ist nur dann möglich, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Koordinaten von $\vec{b}$ übereinstimmt.
- Unter der Vorraussetzung, dass die Produkte der Matrizen mit den Vektoren bildbar sind, gilt für die Matrizen A, B und für die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$:

$$(A\pm B)\cdot\vec{x} = A\cdot\vec{x}\pm B\cdot\vec{x}$$
$$A\cdot(\vec{x}\pm\vec{y}) = A\cdot\vec{x}\pm A\cdot\vec{y}$$

Aufgaben:

2.0 Berechnen Sie

2.1 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$

2.2 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix}$

2.3 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.0 Bei einer Ausschreibung bieten drei Firmen A, B und C Tische, Stühle und Aktenschränke nach folgenden Preislisten an.

	Tisch	Stuhl	Schrank
Firma A	900 €	200 €	500 €
Firma B	800 €	250 €	600 €
Firma C	750 €	300 €	550 €

3.1 Bestimmen Sie, welches Angebot das günstigste ist, wenn 12 Tische, 15 Stühle und 20 Aktenschränke angeschafft werden sollen.

$$\begin{pmatrix} 900 & 200 & 500 \\ 800 & 250 & 600 \\ 750 & 300 & 550 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23800 \\ 25350 \\ 24500 \end{pmatrix}$$

Das Angebot der Firma A ist mit 23.800 € am günstigsten.

Man könnte bei obigem Beispiel aber auch andersherum fragen: Wie viele Türen, Fenster und Vordächer können täglich hergestellt werden, wenn die Schreinerei täglich 123 Arbeitsstunden, die Schlosserei 46 Arbeitsstunden und die Glaserei 15 Arbeitsstunden zur Verfügung hat.

Dazu setzt man ganz einfach den Bestellvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ allgemein an und löst das Gleichungssystem, welches man durch folgenden Ansatz erhält:

$$A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 46 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 9b_1 + 6b_2 \phantom{{}+7b_3} &= 123 \\ 2b_1 + 3b_2 + 7b_3 &= 46 \\ 2b_2 + b_3 &= 15 \end{aligned}$$

Lösung: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

15.4 Einheitsmatrix

Bei der Multiplikation reeller Zahlen gilt: $1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$
Da die Zahl 1 bei Multiplikation mit einer Zahl a deren Wert nicht ändert nennt man sie auch das neutrale Element der Multiplikation.
Ein solches neutrales Element gibt es auch bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor.

<u>Einheitsmatrix</u>:

Die quadratische $(n \times n)-$Matrix $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, bei der auf der Diagonalen die Zahl 1, sonst die Zahl 0 steht, heißt Einheitsmatrix (vom Typ n).
Die Einheitsmatrix verhält sich neutral bezüglich der Multiplikation mit einem Vektor $\vec{x}$ (mit n Koordinaten). Es gilt:

$$E \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Beispiel:

$$E_3 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Die Bedeutung der Einheitsmatrix wird sich uns erst im nächsten Abschnitt erschließen.

Aufgaben:

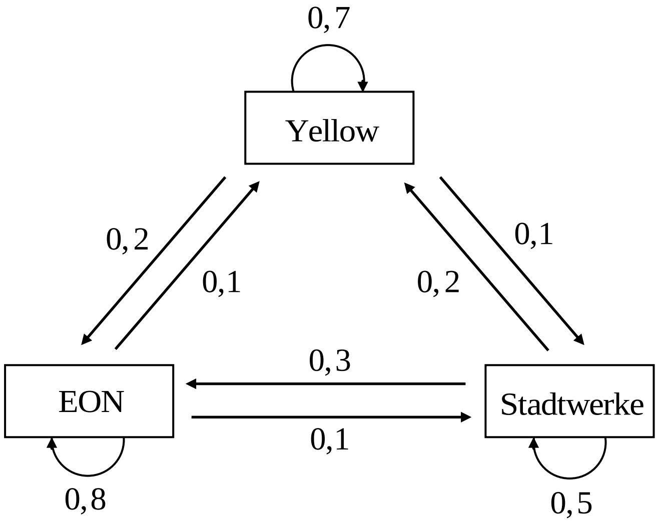
4.0 Gegeben sind die Matrizen $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

4.1 $(E - A) \cdot \vec{x}$

4.2 $(A - E) \cdot \vec{x}$

15.4 Verflechtungsdiagramm - Übergangsmatrix

In Bayern konkurrieren drei Stromanbieter EON, Stadtwerke und Yellow-Strom um einen als konstant angenommenen Kundenstamm.
Durch eine längerfristige Befragung wurde das Wechselverhalten der Kunden von Jahr zu Jahr untersucht. Das Ergebnis ist in einem Verflechtungsdiagramm (auch Gozintograph genannt) dargestellt.



Der Grafik ist zum Beispiel zu entnehmen, dass von den derzeitigen Kunden von EON im folgenden Jahr 80% wieder bei EON Strom kaufen, jedoch jeweils 10% zu den Anbietern Yellow-Strom und Stadtwerke wechseln.

Diese graphische Darstellung lässt sich aber auch in eine Tabelle übertragen.

		Abfluss		
		EON	Stadtwerke	Yellow
Zufluss	EON	0,8	0,3	0,2
	Stadwerke	0,1	0,5	0,1
	Yellow	0,1	0,2	0,7

In den Zeilen ist der Zufluss an die Stromanbieter, in den Spalten die Abgabe von Kunden an die Konkurrenz notiert.
Zu dieser Tabelle gehört eine Matrix M, die man als Übergangsmatrix bezeichnet.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Übergangsmatrix M lässt sich nun die Veränderung des Kundenverhaltens von Jahr zu Jahr berechnen.

Zu Beginn der Untersuchung haben die Stromanbieter folgende Marktanteile:

EON: 60%
Stadtwerke: 25%
Yellow-Strom: 15%

Dieser Ausgangszustand kann nun durch einen Bestandsvektor $\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Der prozentuale Kundenanteil der einzelnen Stromversorger zum Beginn des nächsten Jahres ergibt sich dann nach folgender Rechnung:

$$M \cdot \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,585 \\ 0,2 \\ 0,215 \end{pmatrix} = \vec{b}_1$$

Yellow-Strom hat somit nach einem Jahr seinen Anteil auf 21,5% gesteigert. EON hat seinen Anteil von 60% nicht halten können und nur noch 58,5% und die Stadtwerke einen Verlust ihres Anteil von 25% auf 20% hinnehmen müssen.

Unter der Vorraussetzung, dass das Wechselverhalten der Kunden gleich bleibt erhält man für den prozentualen Kundenanteil zu Beginn eines weiteren Jahres:

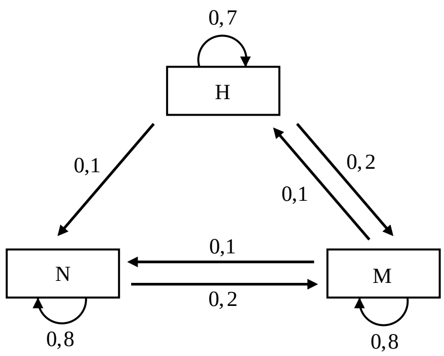
$$M \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,585 \\ 0,2 \\ 0,215 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,571 \\ 0,18 \\ 0,249 \end{pmatrix} = \vec{b}_2$$

Entsprechend würden sich die Kundenanteile (Bestellvektoren) für die nächsten Jahre ergeben.

Die Stadtwerke müssten aber ihr wirtschaftliches Denken etwas überdenken!!!!

Aufgaben:

5.0 Der Vorschlag eines Politikers zu einer umfassenden Steuerreform sieht vor, die Steuerzahler nur noch drei Einkommensgruppen (Niedrig, Mittel, Hoch) zuzuordnen und innerhalb dieser Gruppen einheitlich zu besteuern.
Jeweils zur Mitte des Jahres erfolgt eine neue Einordnung abhängig vom Einkommen des Vorjahres.
Für einen Landkreis mit 100000 Erwerbstätigen hat man über einen längeren Zeitraum untersucht, welche Verschiebungen zwischen den Gruppen auftreten. Das nebenstehende Diagramm gibt für jede Einkommensgruppe an, welche Anteile dieser Gruppe bei der Neueinstufung zur Jahresmitte die Gruppe wechseln bzw. in ihrer derzeitigen Gruppe bleiben.

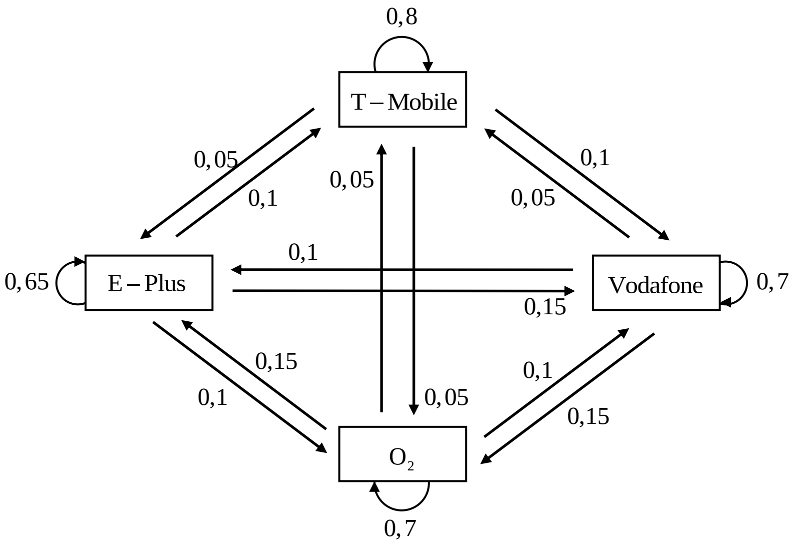


5.1 Beschreiben Sie den Wechsel zwischen den Einkommensgruppen in Form einer Tabelle und geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.

5.2 Berechnen Sie die prozentualen Anteile in den einzelnen Einkommensgruppen nach einem und nach zwei Jahren, wenn zu Beginn folgende Verteilung vorlag:

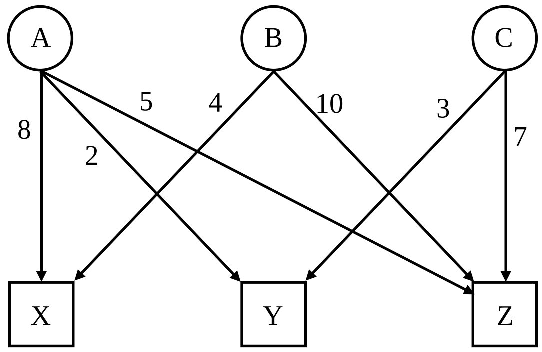
Niedrige Gruppe:	35000 Erwerbstätige
Mittlere Gruppe:	50000 Erwerbstätige
Hohe Gruppe:	15000 Erwerbstätige

6.0 In Deutschland gibt es vier Handy-Netzbetreiber (T-Mobile, E-Plus, Vodafone und O2). Diese Mobilfunknetze werden von sämtlichen Mobilfunk-Betreibern und Handy-Discountern benutzt.
Zum Ausbau der Netze hat man das Wechselverhalten der Kunden bezüglich der vier Netze untersucht. Der Zusammenhang wird durch folgendes Diagramm beschrieben. Dabei wird angenommen, dass der Wechsel der Kunden nur zum Quartalsbeginn möglich ist. Der Anteil der Neukunden, also der Kunden die vorher noch bei keinem Netzbetreiber waren sei für diese beiden Quartale unberücksichtigt.



6.1 Geben Sie die Übergangsmatrix M für den Austausch der Kunden der Netzbetreiber an.
6.2 Berechnen Sie die prozentuale Kundenverteilung nach einem und nach zwei Quartalen, wenn T-Mobile 40%, E-Plus 15%, Vodafone 25% und O2 20% der Kunden unter Vertrag hatte.
Begründen Sie, welcher Netzbetreiber eine Kundenflucht verzeichnet und welcher Netzbetreiber den größten Zuwachs nach zwei Quartalen hat.

7.0 Die Herstellung von Waren A, B und C erfolgt an verschiedenen Standorten X-Stadt, Y-Stadt und Z-Stadt. Die Grafik zeigt den Arbeitsstundenbedarf der einzelnen Standorte X, Y und Z für die Waren.



7.1 Ermitteln Sie, welche Arbeitszeiten für die Standorte einzuplanen sind, wenn 100 Stück der Ware A, 50 Stück der Ware B und 200 Stück von C benötigt werden.