# § 14 Abstandsberechnungen

Eine wichtige Sache in der Geometrie sind Abstandsberechnungen.
Den Abstand zweier Punkte A und B habe wir ja schon behandelt, es gilt:

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

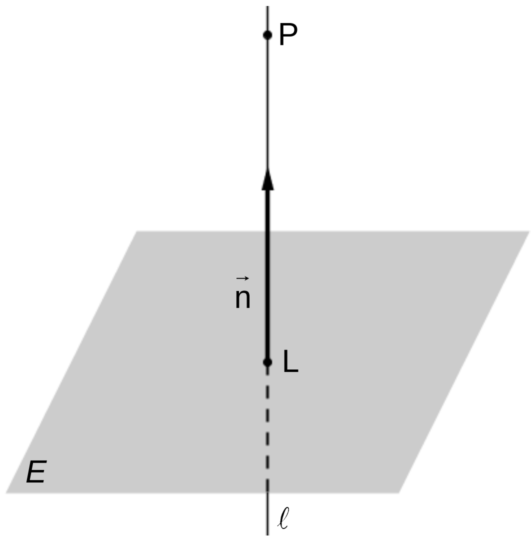
Wir wollen nun den Abstand eines Punktes von einer Geraden bzw. einer Ebene, den Abstand einer Geraden von einer parallelen Geraden bzw. einer parallelen Ebene und den Abstand zweier parallelen Ebenen bestimmen.
Der Abstand zweier windschiefer Geraden ist nicht mehr Teil des Lehrplans, wird aber der Vollständigkeit halber noch mitbehandelt.

## *14.1 Lotfußpunktmethode*

Eine wichtige Rolle bei den Abstandberechnungen spielt der sogenannte Lotfußpunkt.

Sei also ein Punkt P und eine Ebene $E:\vec{n}\circ\vec{x}-c=0$ in Normalenform (oder auch in Koordinatenform) gegeben. Man bestimmt den Lotfußpunkt L des Lotes von P auf E.
Dazu geht man folgendermaßen vor:

- Stelle ein Gleichung der Lotgeraden $\ell$ auf, die den Punkt P als Stützpunkt und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene als Richtungsvektor besitzt.
  $$\ell:\vec{x}=\vec{p}+\lambda\cdot\vec{n}$$
- Der Lotfußpunkt L ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der Lotgeraden $\ell$.




Beispiel: Bestimmen Sie den Lotfußpunkt des Punktes $P(4|3|1)$ auf der Ebene

$$E:3x_1+2x_2+x_3-5=0$$

Für die Lotgerade gilt:

$$\ell:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Nun setzt man die Geradengleichung von $\ell$ als allgemeinen Geradenpunkt $X_\ell(4+3\lambda|3+2\lambda|1+\lambda)$ in die Ebene E ein:

$$3\cdot(4+3\lambda)+2\cdot(3+2\lambda)+(1+\lambda)-5=0 \;\Rightarrow\; 14\lambda+14=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-1$$

Diesen Wert setzt man nun in den allgemeinen Geradenpunkt $X_\ell$ der Lotgeraden $\ell$ ein und erhält den Lotfußpunkt L

$$L(1|1|0)$$

### *14.1.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene*

Den Abstand des Punktes P von der Ebene E erhält man aus der Länge des Vektors $\overrightarrow{PL}$, wobei L der Lotfußpunkt des Punkts P von der Ebene E ist.

$$d(P,E) = d(P,L) = \left|\overrightarrow{PL}\right|$$

Für obiges Beispiel gilt:

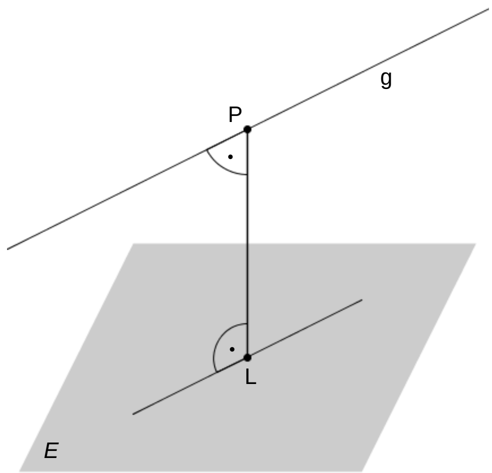
$$d(P,E) = d(P,L) = \left|\overrightarrow{PL}\right| = \left|\begin{pmatrix}1-4\\1-3\\0-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

### *14.1.2 Abstand einer Geraden von einer parallelen Ebene*

Die Berechnung des Abstands einer Geraden g von einer parallelen Ebene E führt man auf die Berechnung des Abstand eines Punktes $P \in g$ von der Ebene E zurück.

$$d(g,E) = d(P,E)$$

Hinweis: Als Punkt P wählt man sich am besten den Stützpunkt der Geraden g.

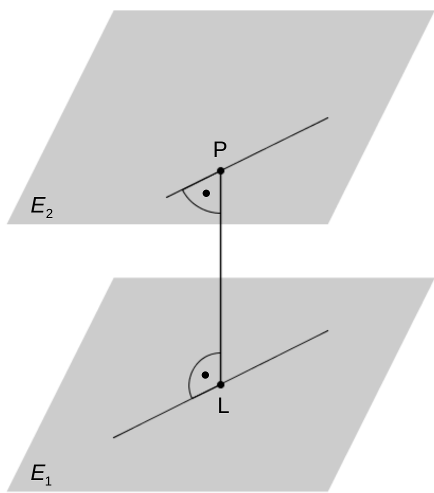



### *14.1.3 Abstand paralleler Ebenen*

Die Berechnung des Abstands einer Ebene $E_2$ von einer parallelen Ebene $E_1$ führt man auf die Berechnung des Abstand eines Punktes $P \in E_2$ von der Ebene $E_1$ zurück.

$$d(E_2, E_1) = d(P, E_1)$$

Hinweis: Ist die Ebene $E_2$ in Parameterform gegeben, so wählt man sich am besten den Stützpunkt der Ebene $E_2$ als Punkt P. Ist die Ebene $E_2$ nicht in Parameterform gegeben, so muss man sich erst einen Punkt $P \in E_2$ suchen!



**Aufgaben:**

1. Welche Abstände haben die Punkte P und Q von der Ebene E?

   a) $P(1|0|0)$, $Q(1|1|1)$ und $E: \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$

   b) $P(1|2|3)$, $Q(0|0|0)$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

   c) $P(1|1|1)$, $Q(-1|0|-1)$ und $E: 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9 = 0$

   d) $P(7|-8|3)$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E. Zeigen Sie, dass g und E parallel sind und berechnen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E.

   a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

   b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Prüfen Sie, ob es Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Gerade g und die Ebene E parallel sind und den Abstand 1 besitzen.

   $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - 9 = 0$

4. Zeigen Sie, dass $E_1$ und $E_2$ parallel sind. Berechnen Sie den Abstand.

   a) $E_1: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 16 = 0$ und $E_2: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 24 = 0$

   b) $E_1: 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 7 = 0$ und $E_2: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

   c) $E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$ und $E_2: \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} + 22 = 0$

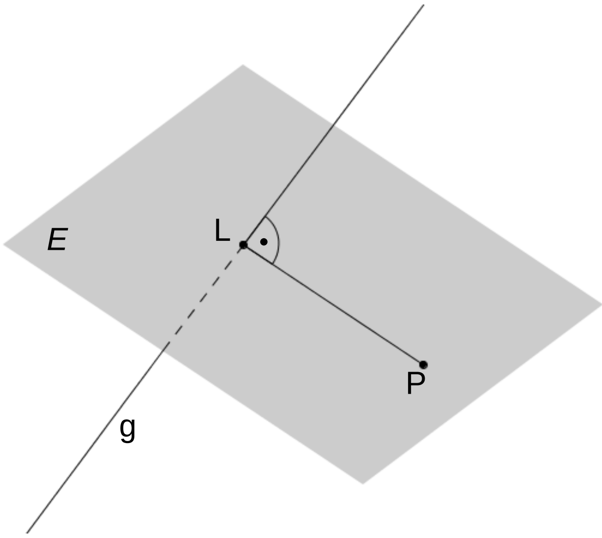
   d) $E_1: 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 13 = 0$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

### *14.2  Lotebenenmethode*

Eine weitere wichtige Rolle bei den Abstandberechnungen spielt die sogenannte Lotebene.

Sei also ein Punkt P und eine Gerade $g:\vec{x}=\vec{s}+\lambda\cdot\vec{u}$ mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ (und dem nicht wichtigen Stützvektor $\vec{s}$) gegeben. Um das Lot L von P auf g zu bestimmen geht man folgendermaßen vor:

- Stelle ein Gleichung der Lotebene E auf, die den Punkt P als Stützpunkt und den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden als Normalenvektor besitzt.
  $$E:\vec{u}\circ\left(\vec{x}-\vec{p}\right)=0$$
- Der Lotfußpunkt L ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der Lotebene E .




Beispiel: Bestimmen Sie den Lotfußpunkt des Punktes $P\left(1|4|3\right)$ auf die Gerade

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Für die Lotebene E gilt:

$$E:\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\right)=x_1+x_2+x_3-8=0$$

Nun setzt man die Geradengleichung von g als allgemeinen Geradenpunkt $X_g\left(1+\lambda\,|\,\lambda\,|\,1+\lambda\right)$ in die Lotebene E ein:

$$1+\lambda+\lambda+1+\lambda-8=0 \;\;\Rightarrow\;\; 3\lambda-6=0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda=2$$

Diesen Wert setzt man nun in den allgemeinen Geradenpunkt $X_g$ der Geraden g ein und erhält den Lotfußpunkt L

$$L\left(3|2|3\right)$$

#### *14.2.1  Abstand eines Punktes von einer Geraden*

Den Abstand des Punktes P von der Geraden g erhält man aus der Länge des Vektors $\overrightarrow{PL}$, wobei L der Lotfußpunkt des Punkts P von der Geraden g ist.

$$d\left(P,g\right)=d\left(P,L\right)=\left|\overrightarrow{PL}\right|$$

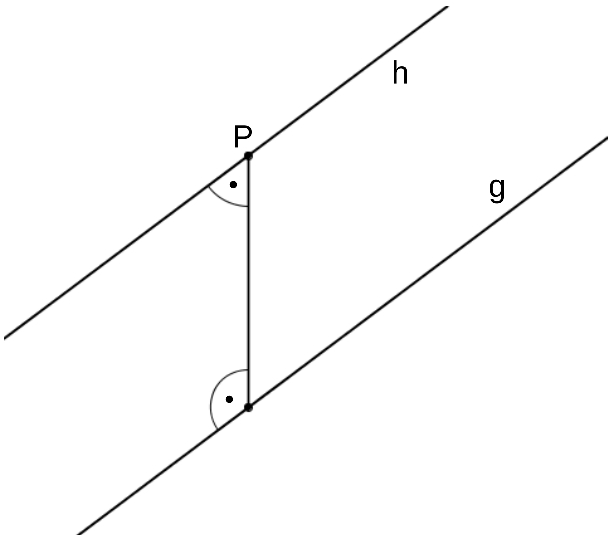
Für obiges Beispiel folgt nun:

$$d(P,g) = d(P,L) = \left|\overrightarrow{PL}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-4 \\ 3-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$$

### *14.2.2 Abstand paralleler Geraden*

Die Berechnung des Abstands einer Geraden g von einer parallelen Geraden h führt man auf die Berechnung des Abstand eines Punktes $P \in h$ von der Geraden g zurück.

$$d(g,h) = d(P,g)$$




**Aufgaben:**

5. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

   a) $P(5|5|5)$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $P(-4|-2|1)$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   c) $P(7|3|3)$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   d) $P(1|1|0)$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. Welcher Punkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat von den beiden Punkten

   $A(1|-2|3)$ und $B(1|0|1)$ denselben Abstand?

7. Berechnen Sie den Abstand der beiden zueinander parallelen Geraden g und h.

   a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

   b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\-15\end{pmatrix}$

8. Gegeben sind die Punkte $A(2|1|2)$ und $B(-2|3|4)$ sowie die Gerade

   $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   Zeigen Sie, dass die Gerade g zur Geraden durch A und B parallel ist und bestimmen ihren Abstand.

### *14.3 Abstand windschiefer Geraden (nicht im LP!)*