§ 13 Schnittwinkel

Wir wollen nun den Schnittwinkel zweier Geraden, zweier Ebenen und einer Gerade mit einer Ebene bestimmen.

13.1 Schnittwinkel zweier Geraden

Unter dem Schnittwinkel zweier Geraden g und h versteht man den nichtstumpfen Winkel der von den beiden Geraden gebildet wird.

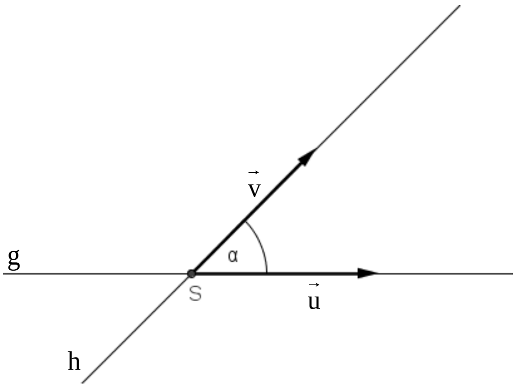
Wir betrachten die beiden Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$.

Wenn wir uns zurück erinnern, dann gilt für den von den beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Möchte man nun den von den beiden Geraden g und h eingeschlossenen Schnittwinkel berechnen, so muss man zunächst zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall:



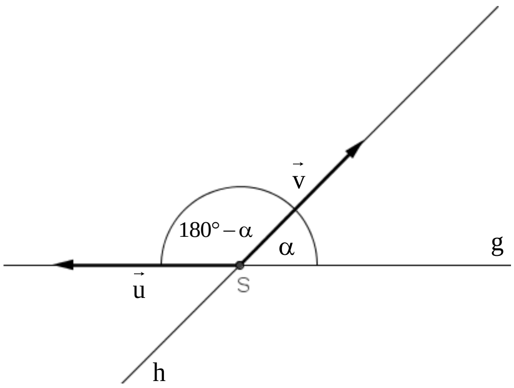
Der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist nicht stumpf.
Dann gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

2. Fall: Der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist stumpf.
Dann gilt:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



Beide Fälle lassen sich aber zusammenfassen:

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Richtungsvektoren zweier sich schneidender Geraden, so gilt für den Schnittwinkel α der beiden Geraden:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right|$$

Beispiel: Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Da beiden Geraden den selben Stützpunkt haben und die Richtungsvektoren haben linear unabhängig sind folgt, dass sich die beiden Geraden im Punkt $S(1|1|2)$ schneiden. Für den Schnittwinkel folgt:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{-10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{10}} \right| = \left| -\sqrt{\tfrac{5}{7}} \right| = \sqrt{\tfrac{5}{7}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 32{,}3°$$

Aufgaben:

1. Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Geraden

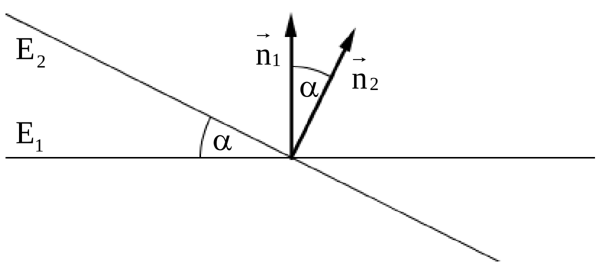
a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = 50{,}8°$

b) $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

13.2 Schnittwinkel zweier Ebenen

Der Schnittwinkel zweier Ebenen E_1 und E_2 ist identisch mit dem Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$.



Für den Schnittwinkel α zweier Ebenen E_1 und E_2 gilt:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$$

Beispiel: Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen

$$E_1: \quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = 0$$
$$E_2: \quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0$$

Für die Normalenvektoren der beiden Ebenen gilt:

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dann folgt für den Schnittwinkel α der beiden Ebenen:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{4}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{9}} \right| = \tfrac{4}{63}\cdot\sqrt{21} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 73{,}1°$$

Aufgaben:

2. Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen

a) $E_1: \ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0$

$E_2: \ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 1 = 0$ $\qquad \alpha = 31{,}0°$

b) $E_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $E_1: \ 3x_1 + 5x_2 = 0$

$E_2: \ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 13 = 0$

3. Zeigen Sie, dass die Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$ alle Koordinatenebenen unter demselben Winkel schneidet. Wie groß ist dieser Winkel?

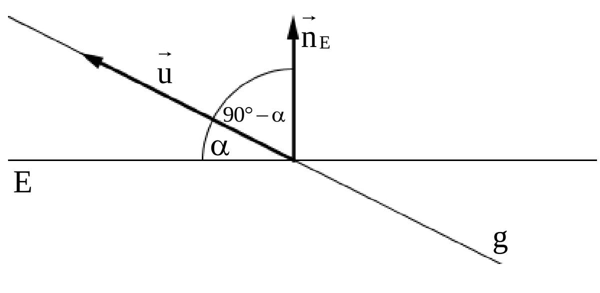
4. Zeigen Sie, dass sich die Ebenen

$$E_1: 2x_2 - x_3 = 0 \text{ und } E_2: 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$$

orthogonal schneiden.

13.3 Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

Den Schnittwinkel α zwischen einer Ebene E und einer Geraden g erhält man über eine Schnittwinkelberechnung zwischen dem Richtungsvektor der Geraden g und dem Normalenvektor der Ebene E.



Es gilt:

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \left| \frac{\vec{n}_E \circ \vec{u}}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{u}|} \right|$$

Beispiel: Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E:\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 1 = 0$.

Es gilt: $\sin\alpha = \left| \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \dfrac{17}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{18}} \right| = \frac{17}{78}\sqrt{3} \Rightarrow \alpha \approx 51{,}8°$

Aufgaben:

5. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g und der Ebene E.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad E:\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad E:\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. Prüfen Sie, ob sich die Gerade g und die Ebene E orthogonal schneiden.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad E:\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$