§ 12 Lagebeziehungen

Wir wollen nun die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen untersuchen.

12.1 Lage eines Punktes bezüglich einer Geraden

Das ist eine schon bekannte Übung. Nichts desto trotz hier noch einmal ein Beispiel.

Bsp.: Untersuchen Sie, ob der Punkt $A(-5|4|-7)$ auf der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ liegt.

Dazu setzt man den Ortsvektor von A mit der Geradengleichung gleich (Punktprobe) um zu prüfen, ob es einen Parameter λ gibt, so dass der Ortsvektor von A die Geradengleichung erfüllt.

$$\begin{pmatrix}-5\\4\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}-5=1+2\lambda\\ 4=1-\lambda\\ -7=2+3\lambda\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\lambda=-3\\ \lambda=-3\\ \lambda=-3\end{cases}$$

Da λ eindeutig bestimmt ist liegt der Punkt A auf der Geraden.
Ist das λ nicht eindeutig bestimmt, oder führt eine der obigen Gleichung auf eine falsche Aussage, dann liegt der Punkt nicht auf der gegebenen Geraden.

Aufgabe:

1. Prüfen sie ob die Punkte $A(5|-2|2)$, $B(-1|2|2)$ und $C(-3|2|3)$ auf der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ liegen.

12.2 Lage eines Punktes bezüglich einer Ebene

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Ist die Ebene in Parameterform gegeben, dann setzt man den Ortsvektor des Punktes mit der Parametergleichung gleich (Punktprobe). Löst man das so erhaltene überbestimmte Gleichungssystem (2 Unbekannte und 3 Gleichungen) und erhält eine eindeutige Lösung (für alle drei Gleichungen), dann liegt der Punkt in der Ebene. Andernfalls natürlich nicht.
2. Ist die Ebene in Koordinatenform gegeben, dann setzt man die Koordinaten des Punktes in die Koordinatengleichung der Ebene ein. Erhält man eine Gleichung mit wahrer Aussage, dann liegt der Punkt in der Ebene. Andernfalls liegt er nicht in der Ebene.

Bsp.: Bestimmen Sie die Lage des Punktes $A(-1|6|0)$ bezüglich der Ebene

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} \text{ bzw. } H:2x_1-x_2+3x_3+6=0$$

$$\begin{pmatrix}-1\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-1=2+3\lambda\\ 6=4+2\lambda+4\mu\\ 0=1-\lambda-2\mu\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3\lambda=-3\\ 2\lambda+4\mu=2\\ \lambda+2\mu=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-1\\ \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\\ -2+4\mu=2\\ -1+2\mu=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu=1\\ \mu=1\end{cases}$$

Die beiden Parameter λ und μ sind eindeutig bestimmt, somit liegt der Punkt A in der Ebene E.

$H:\ 2\cdot(-1)-6+3\cdot 0+6=0 \ \Rightarrow\ 2=0\ \ (f)$

Der Punkt A liegt nicht in der Ebene H.

Aufgaben:

2. Prüfen sie ob die Punkte $A(1|4|-1)$, $B(2|4|1)$ und $C(3|7|-3)$ in der Ebene $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ liegen.
3. Prüfen sie ob die Punkte $A(1|2|4)$ und $B(2|0|-1)$ in der Ebene $E:2x_1-2x_2+x_3-2=0$ liegen.

12.3 Lage zweier Geraden

Bei der gegenseitigen Lage zweier Geraden

$$g:\vec{x}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{u}$$
$$h:\vec{x}=\vec{b}+\mu\cdot\vec{v}$$

gibt es vier verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1. <u>*Die beiden Geraden g und h sind identisch*</u>,
   wenn sie linear abhängige Richtungsvektoren $\left(\vec{u}=k\cdot\vec{v}\ \text{ mit } k\in\mathbb{R}\right)$ haben und der Stützvektor $\vec{a}$ der Geraden g auf der Geraden h liegt.
2. <u>*Die beiden Geraden g und h sind echt parallel*</u>,
   wenn sie linear abhängige Richtungsvektoren $\left(\vec{u}=k\cdot\vec{v}\ \text{ mit } k\in\mathbb{R}\right)$ und der Stützvektor $\vec{a}$ der Geraden g nicht auf der Geraden h liegt.
3. <u>*Die beiden Geraden g und h schneiden sich*</u>,
   wenn sie linear unabhängige Richtungsvektoren $\left(\vec{u}\neq k\cdot\vec{v}\ \text{ mit } k\in\mathbb{R}\right)$ haben und durch

Gleichsetzen der Geradengleichungen $(g = h)$ ein eindeutig lösbares Gleichungssystem entsteht.
Den Ortsvektor des Schnittpunkts erhält man durch einsetzen des Wertes von λ in g oder von μ in h.

4. <u>*Die beiden Geraden g und h sind windschief*</u>,
wenn sie linear unabhängige Richtungsvektoren $\left(\vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\right)$ haben und durch Gleichsetzen der Geradengleichungen $(g = h)$ kein eindeutiges lösbares Gleichungssystem entsteht.

Am besten wir behandeln für jeden dieser Fälle ein eigenes Beispiel.
Untersuchen Sie also die gegenseitige Lage der Geraden:

1. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Zunächst richtet man seinen Blick auf die beiden Richtungsvektoren. Da

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\vec{u} = -2 \cdot \vec{v}\right)$$

sind die beiden Richtungsvektoren linear abhängig und die beiden Geraden schon mal parallel. Bleibt nun zu klären ob die beiden Geraden identisch oder echt parallel sind. Dazu setzt man den Stützvektor der Geraden h mit der Geraden g gleich und erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, die Geraden g und h sind daher identisch.

2. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Zunächst richtet man seinen Blick auf die beiden Richtungsvektoren. Da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \left(\vec{u} = -\vec{v}\right)$$

sind die beiden Richtungsvektoren linear abhängig und die beiden Geraden schon mal parallel. Bleibt nun zu klären ob die beiden Geraden identisch oder echt parallel sind. Dazu setzt man den Stützvektor der Geraden h mit der Geraden g gleich und erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, die Geraden g und h sind daher echt parallel.

3. $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-11\\9\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\11\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$

Beim Blick auf die beiden Richtungsvektoren stellt man sofort fest, dass sie linear unabhängig sind $\left(\vec{u}\neq k\cdot\vec{v}\right)$. Somit können die beiden Geraden nicht parallel sind. Bleibt zu prüfen, ob sie sich schneiden oder ob sie windschief sind.

Dazu setzt man die beiden Gerade gleich $(g=h)$ und hat nun folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix}-11\\9\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\11\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}-\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\\3\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{cases}-4\lambda-3\mu=7\\3\lambda-5\mu=2\\-2\lambda-\mu=3\end{cases}$$

Löst man zunächst nur mal die ersten beiden Gleichungen, so folgt:

$$\begin{array}{lll}\text{I.} & -4\lambda-3\mu=7 & \cdot 3\\ \text{II.} & 3\lambda-5\mu=2 & \cdot 4 \quad (+)\\ \text{III.} & (-2\lambda-\mu=3) & \\ & -29\mu=29 & \Rightarrow\quad \mu=-1\\ & 3\lambda+5=2 & \Rightarrow\quad \lambda=-1\end{array}$$

Setzt man λ und μ in die dritte Gleichung ein, so erhält man

$-2\cdot(-1)-(-1)=3 \;\Rightarrow\; 2+1=3 \;\Rightarrow\; 3=3 \;\;(w)$

eine wahre Aussage. Somit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, die beiden Geraden haben einen Schnittpunkt.

Setzt man nun $\lambda=-1$ in die Geradengleichung von g ein, so erhält man den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schnittpunktes S.

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}-11\\9\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\6\\3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad S(-7\,|\,6\,|\,3)$$

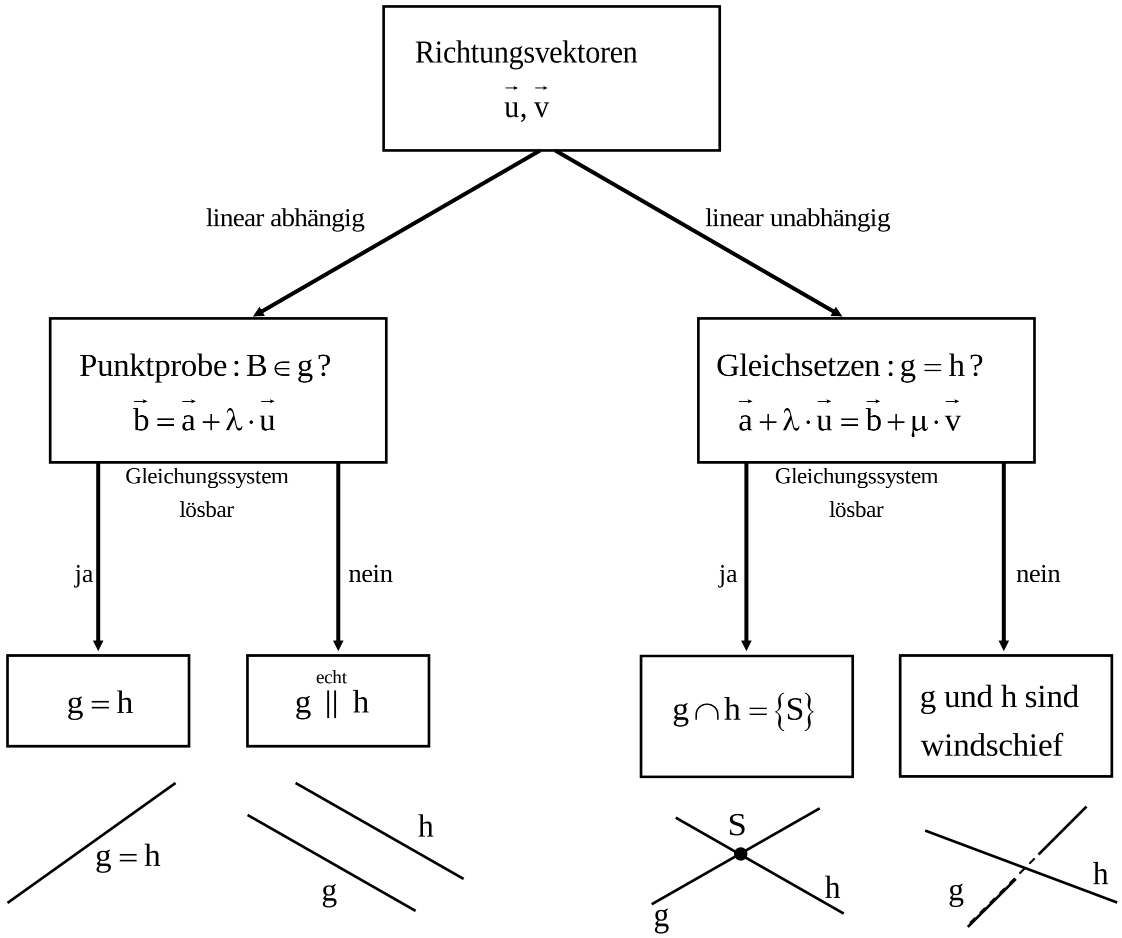
Wäre obiges Gleichungssystem nicht lösbar gewesen, so gäbe es keinen Schnittpunkt. Die Geraden wären dann windschief.

(Ein Beispiel für den vierten Fall können wir uns dann sparen; siehe Aufgaben später!)

In folgendem Diagramm ist die Vorgehensweise zur Untersuchung der Lagebeziehung zwischen den Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$$

noch einmal übersichtlich dargestellt:



Aber es gibt noch eine andere Möglichkeit zur Untersuchung der Lage zweier Geraden zueinander. Man spart sich dann oft eine Punktprobe oder ein umständliches Gleichsetzen mit anschließendem Lösen eines vielleicht umfangreichen Gleichungssystems. Allerdings muss man hier dann geometrisch schon etwas geübter sein.
Wir nehmen uns einfach die vier möglichen Fälle noch einmal vor.

Seien also noch einmal die Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$$

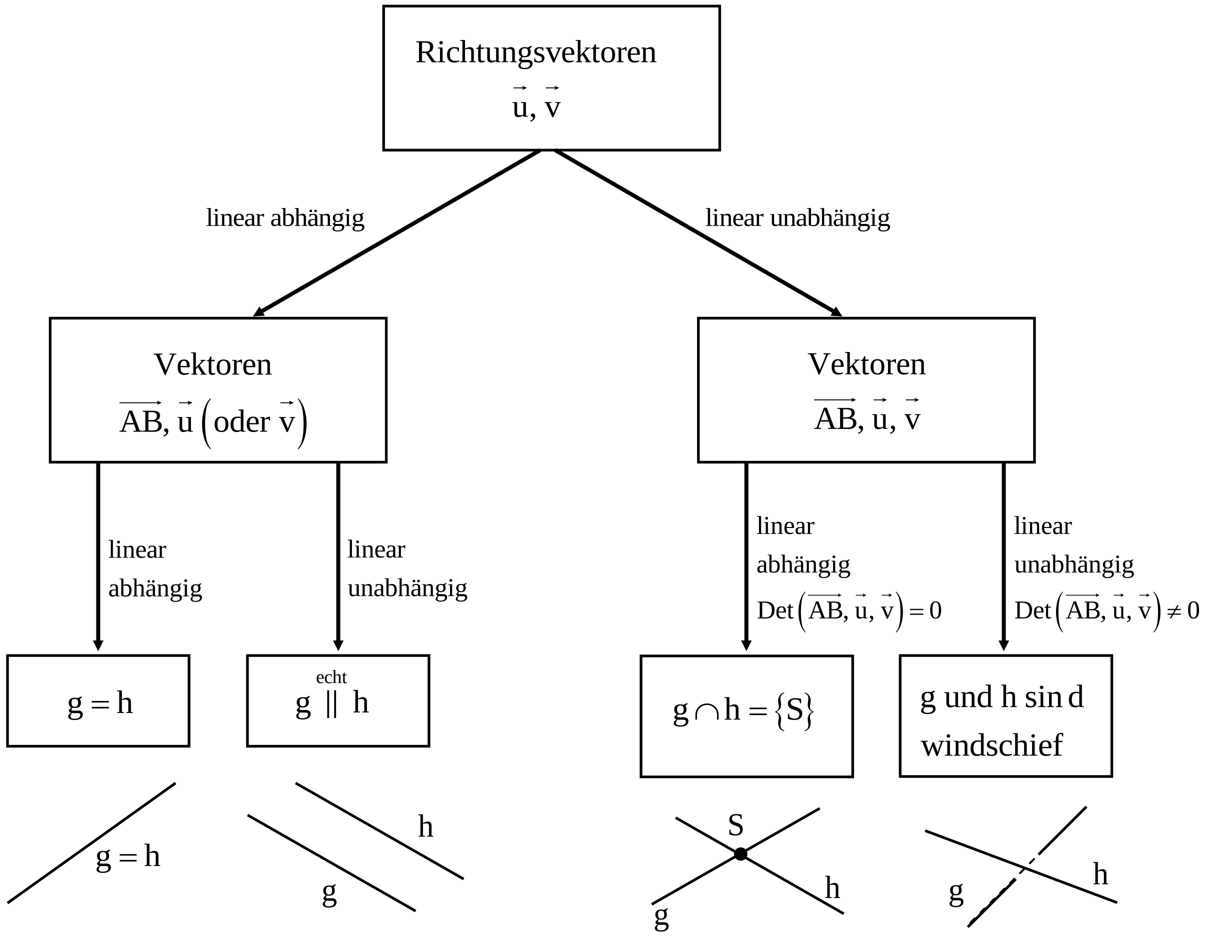
Dabei sei A der Stützpunkt der Geraden g und B der Stützpunkt der Geraden h.

1. *<u>Die beiden Geraden g und h sind identisch</u>*

   Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig $\left(\vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\right)$; der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ und der Richtungsvektor $\vec{u}$ sind ebenfalls linear abhängig $\left(\overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{u} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\right)$.

2. *Die beiden Geraden g und h sind echt parallel*
   Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig $\left(\vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\right)$; der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ und der Richtungsvektor $\vec{u}$ sind linear unabhängig $\left(\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \vec{u} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\right)$.
3. *Die beiden Geraden g und h schneiden sich*,
   Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig $\left(\vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\right)$; der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ und die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig $\left(\text{Det}\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0\right)$.
   Den Schnittpunkt der beiden Geraden erhält man so allerdings nicht. Dazu muss man wieder die beiden Geraden gleichsetzen und das entsprechende Gleichungssystem lösen.
4. *Die beiden Geraden g und h sind windschief*
   Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig $\left(\vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\right)$; der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ und die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind ebenfalls linear unabhängig $\left(\text{Det}\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) \neq 0\right)$.

Auch das lässt sich in einem Diagramm zusammenfassen:



Aufgaben:

4. Untersuche die Lage von g und h und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

5. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von a sind g und h_a identisch?

b) Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a?

c) Für welche Werte von a sind g und h_a windschief?

6. Gegeben sind die Punkte $A(1|2|2)$, $B(2|-1|1)$ und die Geradenschar

$g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2k \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme k so, dass g_k parallel zu AB ist.

b) Für welche Werte von k sind AB und g_k windschief?

7. Gegeben sind die Geraden $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von t sind g_t und h_t identisch?

b) Für welche Werte von t schneiden sich g_t und h_t? Gib den Schnittpunkt S an.

c) Für welche Werte von t sind g_t und h_t windschief?

8. Gegeben sind die beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Geraden h_t für jedes $t \in \mathbb{R}$ zur Geraden g windschief ist.

9. Untersuche die Lage der Geraden g und h in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4k \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$

10. (B I 98) Die Punkte $A(5|10|0)$ und $B(6|9|-1)$ bestimmen die Gerade g. Gib eine Gleichung der Geraden g an und untersuche die Lage zwischen der Geraden g und der Geraden $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (mit $\tau \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$) in Abhängigkeit von a. Berechne dabei insbesondere, für welchen Wert des Parameters a die zugehörige Gerade h_a zur Geraden g parallel ist.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. (B II 98) Zeige, dass die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit keiner der Geraden

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ a \end{pmatrix}$ einen Punkt gemeinsam hat.

12. Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass sich die Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{a} - \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ schneiden.

12.4 Lage zwischen Gerade und Ebene

Bei der Lageuntersuchung einer Geraden und einer Ebene gibt es drei verschieden Fälle zu unterscheiden

1. *Die Gerade g liegt in der Ebene E*
2. *Die Gerade g ist echt parallel zur Ebene E*
3. *Die Gerade g schneidet die Ebene E*

12.4.1 Die Ebenengleichung ist in Parameterform gegeben

Dann ist es am sinnvollsten die Ebenengleichung in Koordinatenform umzuwandeln.

12.4.2 Die Ebenengleichung ist in Koordinatenform gegeben

Um die gegenseitigen Lage einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ und einer Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$ zu untersuchen setzt man einfach die Geradengleichung als allgemeinen Koordinatenpunkt in die Koordinatengleichung der Ebene E ein. Man erhält somit eine Gleichung mit nur einer Unbekannten.
Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, so erhält man für die Unbekannte λ einen Wert mit dem man die Koordinaten des Schnittpunktes berechnen kann.
Führt das Gleichungssystem auf eine wahre Aussage, dann liegt die Gerade in der Ebene, bei einer falschen Aussage ist die Gerade g echt parallel zur Ebene E.

Bspe.: Untersuche die Lage der Gerade g bezüglich der Ebene E

1. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad E: 13x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 33 = 0$

Setzt man nun den allgemeinen Geradenpunkt $X_g(5|7+2\lambda|5+6\lambda)$ in die Ebenengleichung ein, so erhält man:

$$13 \cdot 5 - 6 \cdot (7 + 2\lambda) + 2 \cdot (5 + 6\lambda) - 33 = 0$$
$$65 - 42 - 12\lambda + 10 + 12\lambda - 33 = 0$$
$$0 = 0 \quad (w)$$

Somit folgt: $g \in E$

Hätte man hier eine falsche Aussage erhalten, so folgert man: $g \overset{\text{echt}}{\parallel} E$

2. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E: 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4 = 0$

Setzt man nun den allgemeinen Geradenpunkt $X_g(2+2\lambda|3-3\lambda|-1+\lambda)$ in die Ebenengleichung ein, so erhält man:

$$3 \cdot (2 + 2\lambda) + 4 \cdot (3 - 3\lambda) - 2 \cdot (-1 + \lambda) - 4 = 0$$
$$6 + 6\lambda + 12 - 12\lambda + 2 - 2\lambda - 4 = 0$$
$$-8\lambda = -16 \quad \Rightarrow \lambda = 2$$

Somit folgt: $g \cap E = \{S\}$ $\quad$ (g und E haben einen Schnittpunkt)

Setzt man nun $\lambda = 2$ in den allgemeinen Geradenpunkt ein so erhält man:

$$X_g(2+2\cdot 2|3-3\cdot 2|-1+2) \;\Rightarrow\; S(6|-3|1)$$

Aufgaben:

13. Untersuchen Sie die Lage zwischen der Ebene E und der Geraden g. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad E: x_1 - x_2 + x_3 + 3 = 0$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad E: x_1 + 2x_2 + x_3 - 11 = 0$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad E: \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Definition</u>:
Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen heißen Spurpunkte.

Kennt man die Spurpunkte einer Geraden, so weiß man wo diese die Koordinatenebenen schneidet.
Durch die Kenntnis der Spurpunkt lässt sich die Gerade im Koordinatensystem sehr gut und leicht zeichnen.

Die Berechnung der Spurpunkte ist recht einfach:

Beispiel: Berechne die Spurpunkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

i) S_1 ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der $x_2 - x_3 -$Ebene:
Die $x_2 - x_3 -$Ebene hat die Gleichung $x_1 = 0$. Nun setzt man die $x_1 -$Koordinate des allgemeinen Geradenpunktes $X_g\left(1+\lambda \,|\, -4+2\lambda \,|\, 4-\lambda\right)$ gleich null und berechnet den zugehörigen Parameterwert λ.
Also $x_1 = 1+\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$
Das nun wieder in den allgemeinen Geradenpunkt der Geraden g eingesetzt liefert den gesuchten Spurpunkt: $S_1\left(0 \,|\, -6 \,|\, 5\right)$

ii) S_2 ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der $x_1 - x_3 -$Ebene: $S_2(3|0|2)$

iii) S_3 ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der $x_1 - x_2 -$Ebene: $S_3(5|4|0)$

Aufgaben:

14. Berechne die Spurpunkte der Geraden
    a) $A(1|0|2), B(0|2|1)$
    b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
    c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
15. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat eine Gerade
    a) mit genau zwei Spurpunkten?
    b) mit genau einem Spurpunkt?
    c) mit keinem Spurpunkt?

Es gibt noch so eine Sache, die vielleicht hilfreich sein kann:
Gilt nämlich für den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E:

$$\vec{u} \circ \vec{n} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g \cap E = \{S\}$$
$$\vec{u} \circ \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad g \parallel E$$

Sollte die Ebene allerdings in Parameterform gegeben sein, so muss man diese nicht unbedingt in Koordinatenform umwandeln um letztendlich in Erfahrung zu bringen, wie eine Gerade zu dieser Ebene liegt.
Sei also die Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ und die Ebene $E: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v} + \tau \cdot \vec{w}$ gegeben.
Dabei sei A der Stützpunkt der Geraden g und B der Stützpunkt der Ebene E.

1. *<u>Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich in einem Punkt S</u>*
   Die Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig $\left(\mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) \neq 0\right)$.

   Um nun die Koordinaten des Schnittpunktes zu ermitteln müsste man jetzt die Gerade g und die Ebene E gleichsetzen. Die Lösung des entstandenen Gleichungssystems ist mit einigem Aufwand verbunden. Da überlegt man sich gerne, ob man die Ebenengleichung nicht in Koordinatenform umwandelt und dann die Gerade einsetzt (siehe oben)!
2. *<u>Die Gerade g liegt in der Ebene E</u>*
   Die Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig $\left(\mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0\right)$.

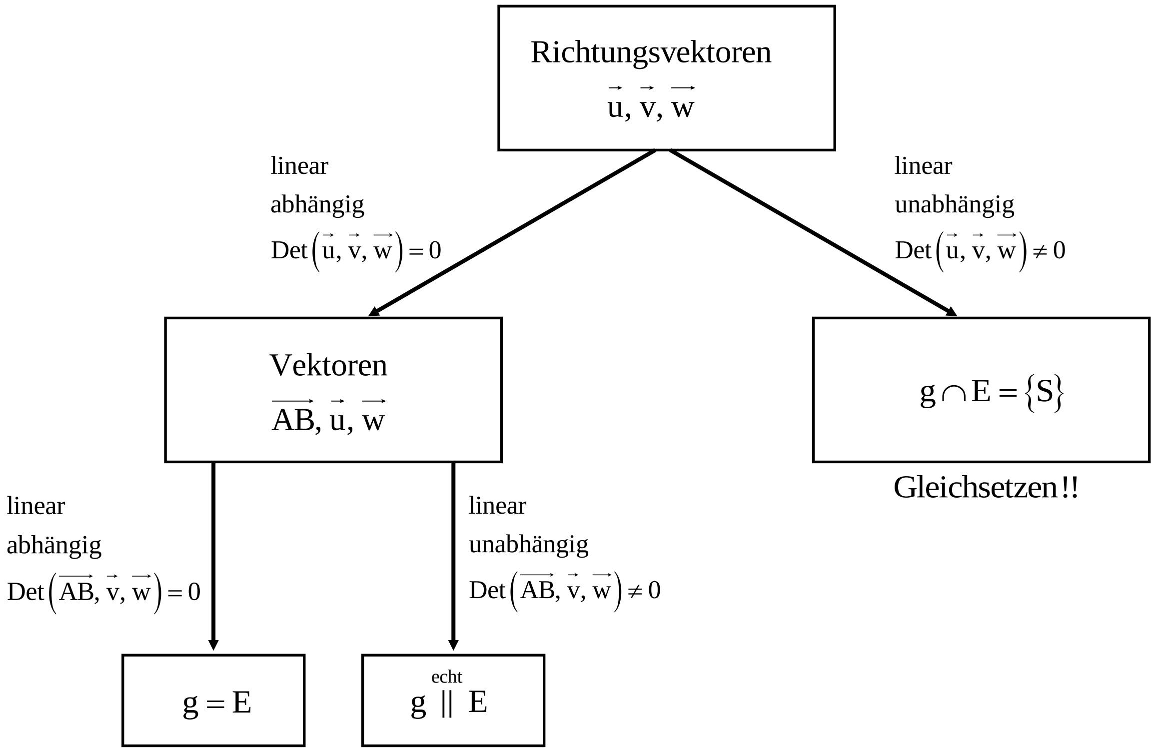
   Die Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ sind ebenfalls linear abhängig $\left(\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0\right)$.

3. <u>*Die Gerade g ist echt parallel zur Ebene E*</u>

   Die Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig $\left(\text{Det}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0\right)$.

   Die Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ sind dagegen linear unabhängig $\left(\text{Det}\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) \neq 0\right)$.

Auch das lässt sich in einem Diagramm zusammenfassen:



<u>Achsenabschnitte einer Ebene</u>:
Die Schnittstellen einer Ebene mit den Koordinatenachsen nennt man Achsenabschnitte der Ebene.
Beispiel: Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$

a) Schnitt mit der $x_1-\text{Achse}$:

   Für die $x_1-\text{Achse}$ gilt: $\underline{\underline{x_2 = x_3 = 0}}$

   Setzt man diese Werte in E ein, so erhält man: $2x_1 - 6 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 3}}$

   Also: $A_1\left(3|0|0\right)$

b) Schnitt mit der $x_2-\text{Achse}$:

   Für die $x_2-\text{Achse}$ gilt: $\underline{\underline{x_1 = x_3 = 0}}$

   Setzt man diese Werte in E ein, so erhält man: $3x_2 - 6 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$

   Also: $A_2\left(0|2|0\right)$

c) Schnitt mit der x_3-Achse:

Für die x_3-Achse gilt: $\underline{\underline{x_1 = x_2 = 0}}$

Setzt man diese Werte in E ein, so erhält man: $6x_3 - 6 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

Also: $A_3\left(0|0|1\right)$

12.5 Lage zweier Ebenen

Bei der Lageuntersuchung zweier Ebenen gibt es drei verschieden Fälle zu unterscheiden

1. *Die Ebenen schneiden sich*
2. *Die Ebenen sind echt parallel zueinander*
3. *Die Ebenen sind identisch*

12.5.1 Die beiden Ebenen sind in Parameterform gegeben

Dann ist es am sinnvollsten eine davon in Koordinatenform umzuwandeln!!
(Man spart sich viel Rechnerei!).

12.5.2 Eine Ebene ist in Parameter-, die zweite Ebene in Koordinatenform gegeben

Die Ebene E_1 ist in Parameterform, die Ebene E_2 in Koordinatenform gegeben.

$$E_1 : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

$$E_2 : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$$

Um etwas über die Lage der beiden Ebenen in Erfahrung zu bringen setzt man einfach die Ebenengleichung der Ebene E_1 als allgemeinen Koordinatenpunkt in die Koordinatengleichung der Ebene E_2 ein. Man erhält somit eine Gleichung mit den beiden Unbekannten λ und μ.

Nun versucht man das Gleichungssystem nach λ (oder μ) aufzulösen.

Gelingt das, dann setzt man den so erhaltenen Wert für λ in die Ebenengleichung der Ebene E_1 ein. Man erhält die Gleichung der Schnittgeraden.

Führt das Gleichungssystem auf eine wahre Aussage, dann sind die beiden Ebenen identisch, bei einer falschen Aussage sind sie echt parallel zueinander.

Bsp.: Untersuche die Lage der beiden Ebenen E und F

$$E : x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 12 = 0 \qquad F : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Setzt man nun den allgemeinen Ebenenpunkt $X_{E_F}\left(2+\lambda-\mu \,|\, 4+2\lambda+2\mu \,|\, 3+3\mu\right)$ in die Ebenengleichung von E ein, so erhält man:

$$\left(2+\lambda-\mu\right) + 2\left(4+2\lambda+2\mu\right) + 4\left(3+3\mu\right) - 12 = 0$$

$$5\lambda + 15\mu + 10 = 0$$

$$\lambda = -2 - 3\mu$$

Das Gleichungssystem hat eine Lösung, daher wissen wir schon, dass sich die beiden Ebenen schneiden. Zur Berechung der Schnittgeraden setzt man das nun erhaltene λ in die Parametergleichung der Ebene F ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2-3\mu) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Schnittgerade hat somit die Form

$$g_S : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

12.5.3 Die beiden Ebenen sind in Koordinatenform gegeben

Sind die beiden Ebenen in Koordinatenform gegeben:

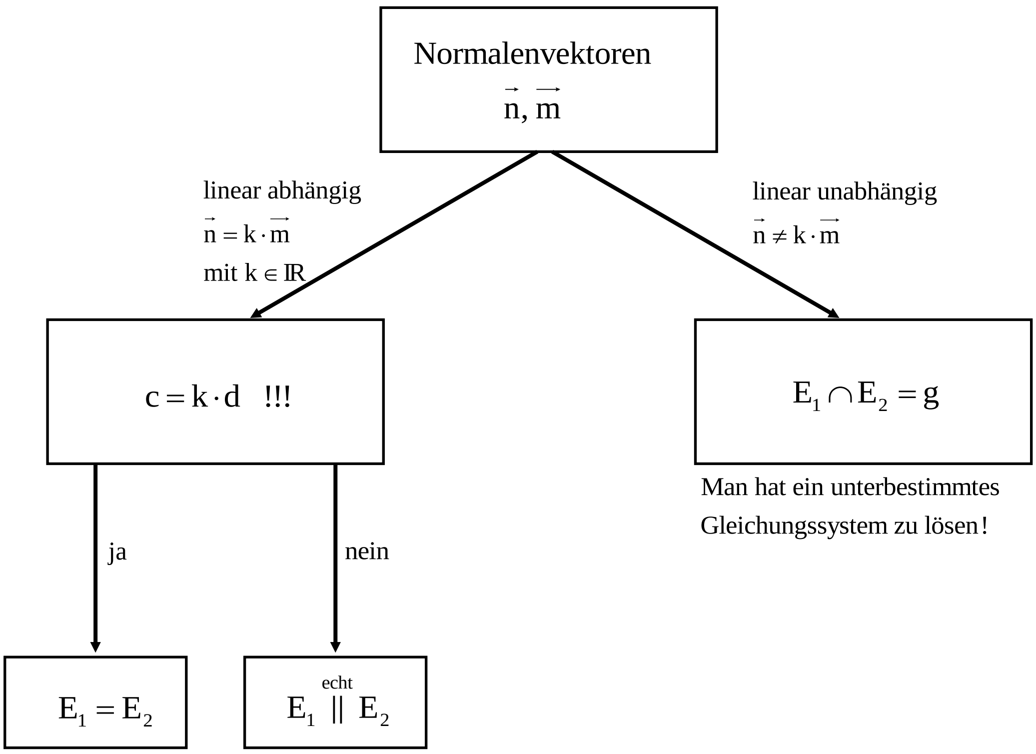
$$E_1 : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$$

$$E_2 : m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + d = 0$$

Die Normalenvektoren sind dann

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:



Bsp.: Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Ebenen E und F.

$$E: 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3 = 0$$
$$F: x_1 - x_2 + 3x_3 - 3 = 0$$

Für die beiden Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{n}_E \neq k \cdot \vec{n}_F$$

somit schneiden sich die beiden Ebenen.
Nun muss man folgendes unterbestimmte Gleichungssystem lösen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 3 & = & 0 \quad \cdot 2 \\ \hline 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 9x_3 & + & 3 & = & 0 \end{array}$$

Dann kann man $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ frei wählen und erhält für x_2 (aus der letzten Zeile):

$$x_2 = 3\lambda - 1$$

Beides nun eingesetzt in die zweite Gleichung liefert x_1:

$$x_1 = 2$$

Somit folgt für die Schnittgerade g:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufagben:

16. Bestimme die gegenseitige Lage der Ebenen und gib gegebenenfalls deren Schnittgerade an.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

e) $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$
$F: x_1 - x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

f) $E: 2x_1 - x_2 = 0$
$F: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

g) $E: 2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
$F: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

h) $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$
$F: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8 = 0$

17. Untersuchen Sie, ob die Ebene E_1 und E_2 parallel oder sogar gleich sind.

a) $E_1: 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6 = 0$ $\quad E_2: -10x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 15 = 0$

$E_1 \equiv E_2$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_1 \overset{\text{echt}}{\parallel} E_2$

c) E_1 ist die Lotebene von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch $P(2|4|3)$.

E_2 geht durch $A(0|2|-1)$, $B(1|-2|5)$ und $C(4|-2|11)$.

d) $E_1: \lambda \cdot (\vec{u} - \vec{v}) + \mu \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ und $E_2: (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{x} = 0$, wobei $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Vektoren sind.

18. Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

a) $E_1: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $E_1: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 14 = 0$ $\quad E_2: 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

19. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E_1, E_2 und E_3 und berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

$E_1: 4x_1 - 5x_2 - x_3 - 14 = 0$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

20. Bestimmen Sie eine Ebene E_1, die die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 = 0$ schneidet, und eine Ebene E_2, die echt parallel zu E ist.
21. Zeigen Sie, dass sich die drei Ebenen in einem Punkt schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

$$E_1 : x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 63 = 0 \qquad E_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

<u>Ebenenscharen</u>:
Enthält eine Koordinatengleichung einer Ebene einen Parameter (Scharparameter), dann beschreibt diese Gleichung eine Ebenenschar. Wir behandeln nur Scharen, bei denen die Parameter linear vorkommen, z.B.

$$E_a : x_1 + (2-a)\cdot x_2 + (a-1)\cdot x_3 - 4 = 0$$

Da alle Ebenen unterschiedliche Normalenvektoren haben sind keine zwei davon zueinander parallel, insbesondere sind sie dann alle nicht parallel zueinander.
Bleibt die Frage, ob sie sich alle in ein und derselben Gerade schneiden?
Um die Lage besser überblicken zu können sortieren wir:

$$\begin{aligned} E_a : \quad & x_1 + (2-a)\cdot x_2 + (a-1)\cdot x_3 - 4 = 0 \\ & x_1 + 2x_2 - ax_2 + ax_3 - x_3 - 4 = 0 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 - ax_2 + ax_3 = 0 \\ & \underbrace{[x_1 + 2x_2 - x_3 - 4]}_{E_0(X)} + a\underbrace{[-x_2 + x_3]}_{F(X)} = 0 \end{aligned}$$

Somit gilt verkürzt geschrieben: $E_a(X) = E_0(X) + a \cdot F(X)$ mit den beiden Ebenengleichungen $E_0 : x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0$ und $F: -x_2 + x_3 = 0$.
Für einen gemeinsamen Punkt S von E_0 und F gilt: $E_0(S) = 0$ und $F(S) = 0$. Damit ist auch $E_a(S) = 0$. Also liegt auch jeder Schnittpunkt von E_0 und F auch in jeder Scharebene E_a.
Zwei Ebenen mit einem gemeinsamen Punkt haben aber immer eine Gerade gemeinsam. Das heißt, alle Ebenen der Schar E_a gehen durch die Schnittgerade von E_0 und F. Die Schnittgerade, in der sich alle Ebenen schneiden nennt man Trägergerade t.
Für die Trägergerade der Ebenenschar E_a, welche sich nun als Schnitt der beiden Ebenen E_0 und F ergibt folgt:

$$t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t der Schar E_a.

a) $E_a: ax_1 + (1+a)x_2 - 2x_3 - 6 = 0$

b) $E_a: (1-a)x_1 + (1+a)x_2 - a = 0$

c) $E_a: x_1 + (2-3a)x_2 - (3-2a)x_3 = 0$

Spurgeraden:

Die Schnittgeraden einer Ebene mit den Koordinatenebenen heißen Spurgeraden.

Die Spurgerade in der $x_2 - x_3 -$Ebene wird mit s_1, die in der $x_1 - x_3 -$Ebene mit s_2 und die in der $x_1 - x_2 -$Ebene mit s_3 bezeichnet.

Beispiel: Berechne die Spurgeraden der Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$

a) Schnitt mit der $x_2 - x_3 -$Ebene:

Die $x_2 - x_3 -$Ebene hat die Koordinatenform $\underline{\underline{x_1 = 0}}$.

Setzt man diesen Wert in E ein, so erhält man: $3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$. Wählt man $\underline{\underline{x_3 = \lambda}}$, so folgt: $\underline{\underline{x_2 = 2 - 2\lambda}}$

Also: $s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Schnitt mit der $x_1 - x_3 -$Ebene:

Die $x_1 - x_3 -$Ebene hat die Koordinatenform $\underline{\underline{x_2 = 0}}$.

Setzt man diesen Wert in E ein, so erhält man: $2x_1 + 6x_3 - 6 = 0$. Wählt man $\underline{\underline{x_3 = \mu}}$, so folgt: $\underline{\underline{x_1 = 3 - 3\mu}}$

Also: $s_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Schnitt mit der $x_1 - x_2 -$Ebene:

Die $x_1 - x_2 -$Ebene hat die Koordinatenform $\underline{\underline{x_3 = 0}}$.

Setzt man diesen Wert in E ein, so erhält man: $2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$. Wählt man $\underline{\underline{x_2 = \tau}}$, so folgt: $\underline{\underline{x_1 = 3 - 1{,}5\tau}}$

Also: $s_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

23. Bestimme die Achsenpunkte und gib die Gleichungen der Spurgeraden an

a) $E: 7x_1 - 14x_2 - 6x_3 - 42 = 0$

b) $E: x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 15 = 0$

c) $E: 2x_1 - x_2 = 0$

24. Bestimmen Sie die Spurgeraden der Ebene E, die durch folgende Punkte bestimmt ist: $A(6|-2|0)$, $B(6|-1|2)$ und $C(-2|1|4)$.

25. Von einer Ebene E sind die x_1-x_2-Spurgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die x_2-x_3-Spurgerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bekannt. Gesucht ist die x_1-x_3-Spurgerade.