§ 12 Lagebeziehungen - Lösungen

1. Prüfen sie ob die Punkte $A(5|-2|2)$, $B(-1|2|2)$ und $C(-3|2|3)$ auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen.
   $A \in g$; $B \notin g$; $C \notin g$

2. Prüfen sie ob die Punkte $A(1|4|-1)$, $B(2|4|1)$ und $C(3|7|-3)$ in der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen.
   $A \in E$; $B \notin E$; $C \in E$

3. Prüfen sie ob die Punkte $A(1|2|4)$ und $B(2|0|-1)$ in der Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0$ liegen.
   $A \in E$; $B \notin E$

4. Untersuche die Lage von g und h und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt:

   a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ windschief

   b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $S(-1|0|2)$

   c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ windschief

   d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$ $g \parallel h$

   e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ $g = h$

5. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von a sind g und h_a identisch?

Für $a = \frac{1}{2}$ sind die beiden Richtungsvektoren kollinear, der Verbindungsvektor mit einem der beiden Richtungsvektoren ist allerdings nicht kollinear, also sind die beiden Geraden nie identisch!

b) Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a ?

($\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{GH}, \vec{u}_g, \vec{u}_h\right) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$; für $a = \frac{1}{2}$ sind allerdings die beiden Richtungsvektoren kollinear; somit gibt es für kein $a \in \mathbb{R}$ einen Schnittpunkt

c) Für welche Werte von a sind g und h_a windschief?

$a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

6. Gegeben sind die Punkte $A(1|2|2)$, $B(2|-1|1)$ und die Geradenschar

$$g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2k \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimme k so, dass g_k parallel zu AB ist.

$k = 1{,}5$

b) Für welche Werte von k sind AB und g_k windschief?

$k \in \mathbb{R} \setminus \{1{,}5\}$

7. Gegeben sind die Geraden $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von t sind g_t und h_t identisch?

Für $t = -1$ sind die beiden Richtungsvektoren kollinear, der Verbindungsvektor der Aufpunkte ist allerdings für $t = -1$ nicht kollinear zu einem Richtungsvektor. Die beiden Geraden sind also für kein t identisch

b) Für welche Werte von t schneiden sich g_t und h_t? Gib den Schnittpunkt S an.

$t = 1;\ S(1|1|2)$

c) Für welche Werte von t sind g_t und h_t windschief?

$t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

8. Gegeben sind die beiden Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Geraden h_t für jedes $t \in \mathbb{R}$ zur Geraden g windschief ist.

9. Untersuche die Lage der Geraden g und h in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad k = 2 \quad \Rightarrow g = h$

$k \neq 2 \quad \Rightarrow g \overset{\text{echt}}{\parallel} h$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4k \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$

Für $k = 2$ sind die beiden Richtungsvektoren kollinear und schließlich $g = h$. Für $k \neq 2$ liefert die Gleichung $\text{Det}(...) = 0$ die beiden Lösungen $k_1 = -4$ und $k_2 = 2$. Da $k \neq 2$ sein muss schneiden sich die beiden Geraden für $k_1 = -4$ im Punkt $S(-4|-8|1)$. Für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}$ sind die beiden Geraden windschief

10. (B I 98) Die Punkte $A(5|10|0)$ und $B(6|9|-1)$ bestimmen die Gerade g. Gib eine Gleichung der Geraden g an und untersuche die Lage zwischen der Geraden g und der Geraden $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (mit $\tau \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$) in Abhängigkeit von a. Berechne dabei insbesondere, für welchen Wert des Parameters a die zugehörige Gerade h_a zur Geraden g parallel ist.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für $a = -2$ sind die beiden Geraden g und h_{-2} echt parallel zueinander.
Für alle $a \neq -2$ sind die beide Geraden windschief.

11. (B II 98) Zeige, dass die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit keiner der Geraden

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ a \end{pmatrix}$ einen Punkt gemeinsam hat.

Für $a = 1$ sind die beiden Richtungsvektoren kollinear und schließlich g_1 echt parallel zu h.
Für $a \neq 1$ sind die Geraden zueinander windschief $(\text{Det}(...) = 0 \Leftrightarrow a = 1)$.

12. Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass sich die Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{a} - \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ schneiden.

13. Untersuchen Sie die Lage zwischen der Ebene E und der Geraden g. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad E: x_1 - x_2 + x_3 + 3 = 0$ $\quad g \overset{\text{echt}}{\parallel} E$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad E: x_1 + 2x_2 + x_3 - 11 = 0$ $\quad S(2\,|\,3{,}5\,|\,2)$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad E: \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$ $\quad g \in E$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad g \overset{\text{echt}}{\parallel} E$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad g \in E$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad S(5\,|\,6\,|\,7)$

14. Berechne die Spurpunkte der Geraden

a) $A(1|0|2), B(0|2|1)$

$S_1(0|2|1), S_2(1|0|2), S_3(-1|4|0)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S_1(0|3|2), S_2(7{,}5|0|3{,}5), S_3(-10|7|0)$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$S_1\left(0|3|-3-\tfrac{1}{2}t\right), S_2(3|0|t-3), S_3\left(1+\tfrac{6}{t}|2-\tfrac{6}{t}|0\right)$

15. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat eine Gerade

a) mit genau zwei Spurpunkten?
Die Gerade muss parallel zu einer Koordinatenebene sein.

b) mit genau einem Spurpunkt?
Die Gerade muss parallel zu zwei Koordinatenebenen sein.

c) mit keinem Spurpunkt?
Gibt es nicht!

16. Bestimme die gegenseitige Lage der Ebenen und gib gegebenenfalls deren Schnittgerade an.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E: x - y - 1 = 0$

$F: z - 4 = 0$

$g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$E: 3x - 2y - z - 12 = 0$

$F: 3x - 2y - z - 12 = 0$

$E = F$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

E ist echt parallel zu F

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

$E: 4x + 3y + 2z - 6 = 0$

$F: 26x + 17y + 14z - 116 = 0$

$g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} -37 \\ 0 \\ 77 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

$F: x_1 - x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

$g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $E: 2x_1 - x_2 = 0$

$F: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

$g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $E: 2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
$F: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

$$g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

h) $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$
$F: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8 = 0$
E und F sind echt parallel

17. Untersuchen Sie, ob die Ebene E_1 und E_2 parallel oder sogar gleich sind.

a) $E_1: 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6 = 0$ $\quad E_2: -10x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 15 = 0$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) E_1 ist die Lotebene von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch $P(2|4|3)$.

E_2 geht durch $A(0|2|-1)$, $B(1|-2|5)$ und $C(4|-2|11)$.

d) $E_1: \lambda \cdot (\vec{u} - \vec{v}) + \mu \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ und $E_2: (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{x} = 0$, wobei $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Vektoren sind.

18. Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

a) $E_1: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $E_1: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 14 = 0$ $\quad E_2: 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

19. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E_1, E_2 und E_3 und berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

$E_1: 4x_1 - 5x_2 - x_3 - 14 = 0$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

20. Bestimmen Sie eine Ebene E_1, die die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 = 0$ schneidet, und eine Ebene E_2, die echt parallel zu E ist.
21. Zeigen Sie, dass sich die drei Ebenen in einem Punkt schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

$E_1: x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 63 = 0$ $\qquad$ $E_2: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$

$$E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

22. Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t der Schar E_a.

a) $E_a: ax_1 + (1+a)x_2 - 2x_3 - 6 = 0$

$$t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $E_a: (1-a)x_1 + (1+a)x_2 - a = 0$

$$t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $E_a: x_1 + (2-3a)x_2 - (3-2a)x_3 = 0$

$$t: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

23. Bestimme die Achsenpunkte und gib die Gleichungen der Spurgeraden an

a) $E: 7x_1 - 14x_2 - 6x_3 - 42 = 0$

$A_1(6|0|0)$; $A_2(0|-3|0)$; $A_3(0|0|-7)$

$$s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad s_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

b) $E: x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 15 = 0$

$A_1(-15|0|0)$; $A_2(0|-5|0)$; $A_3(0|0|3)$

$$s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad s_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) $E: 2x_1 - x_2 = 0$

$A(0|0|0)$

$s_1: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s_{23}: \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

24. Bestimmen Sie die Spurgeraden der Ebene E, die durch folgende Punkte bestimmt ist: $A(6|-2|0)$, $B(6|-1|2)$ und $C(-2|1|4)$.

25. Von einer Ebene E sind die $x_1 - x_2 -$Spurgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die $x_2 - x_3 -$Spurgerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bekannt. Gesucht ist die $x_1 - x_3 -$Spurgerade.