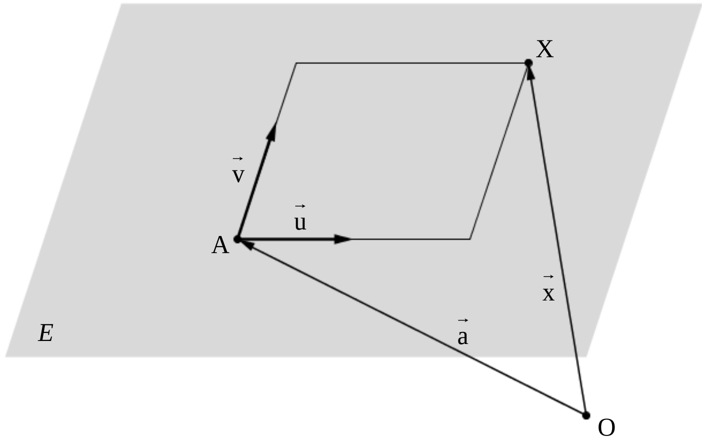
§ 11 Parametergleichung und Koordinatenform einer Ebene

Die Lage einer Ebene E im Raum ist durch drei Größen eindeutig festgelegt:

1. Einen Punkt A, durch den die Ebene verläuft.
2. Ihre Lage im Raum: Diese wird durch zwei nicht parallele Richtungsvektor $\vec{u}$ und $\vec{v}$ festgelegt.



11.1 Parametergleichung einer Ebene

Für jeden Punkt X auf der Ebene E gilt dann:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \text{ mit einem geeigneten } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Formt man etwas um, so erhält man:

$$\vec{x} - \vec{a} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$
$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

Somit lässt sich jeder Punkt X auf der Ebene E beschreiben durch $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$.

Die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ heißt <u>Parametergleichung</u> der Ebene E. Der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Punkt A heißt <u>Stützvektor</u> (oder auch Aufpunktvektor), die beiden linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ <u>Richtungsvektoren</u> der Ebene.
Somit gilt: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

<u>Bemerkung</u>:
Da jeder Punkt der Ebene E als Stützpunkt und jede Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als Richtungsvektor verwendet werden kann, gibt es zu ein und derselben Ebene unendlich viele Parametergleichungen.
Die beiden Richtungsvektoren müssen dabei linear unabhängig sein.

Aufgaben:

1. Gib eine Gleichung der Ebene E an, die durch A in Richtung von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ verläuft.

   a) $A(2|0|1)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

   b) $A(0|0|0)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechne die Punkte P_i der Ebene, die zu den Parameterwerten λ_i und μ_i gehören.
$\lambda_1 = 1; \mu_1 = 2$
$\lambda_2 = 0; \mu_2 = -1$
$\lambda_3 = -1; \mu_3 = 4$

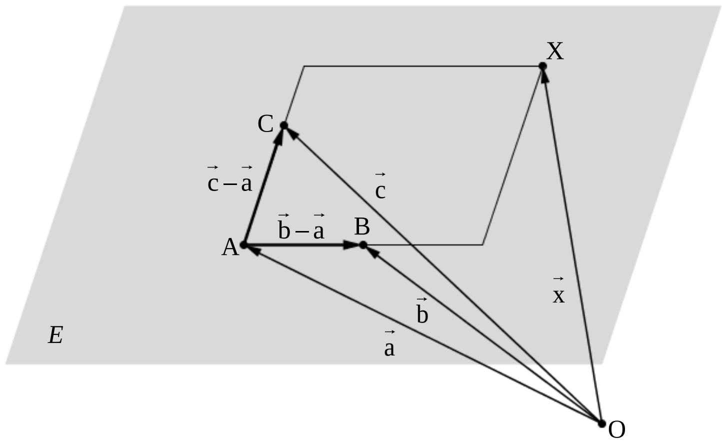
3. Stelle die Gleichung der Ebene E auf, die durch $A(1|2|3)$ geht und parallel ist zur
a) $x_1 - x_2 -$Ebene
b) $x_1 - x_3 -$Ebene
c) Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
d) Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
e) die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ in der Ebene E liegt.

4. Beschreibe die besondere Lage der Ebene im Koordinatensystem
a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.0 Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5.1 Bestimmen Sie vier Punkte, die auf der Ebene E liegen.
5.2 Geben Sie zwei Punkte an, die vom Aufpunktvektor den gleichen Abstand haben.
6. Überprüfen Sie, ob die Punkte $P(-1|6|0)$ und $Q(5|2|6)$ auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegen.

11.2 Drei-Punkte-Gleichung einer Ebene

Eine Ebene ist auch durch die Angabe dreier Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen (deren Ortsvektoren linear unabhängig sind) eindeutig festgelegt.



Die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Ebene lassen sich auch mit den Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ angeben.
Für die beiden Richtungsvektoren gilt:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$$

Somit folgt für die Parametergleichung der Ebene E:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \mu \cdot \left(\vec{c} - \vec{a}\right) \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung nennt man auch Drei-Punkte-Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C.

Aufgaben:

7. Ermitteln Sie eine Parametergleichung für die Ebene durch die Punkte
   a) $A(1|1|-2), B(3|-2|1), C(-1|1|-2)$
   b) $A(0|-1|2), B(1|0|-3), C(2|-1|-2)$
   c) $A(3|1|-2), B(-1|2|-3), C(0|-1|1)$

11.3 Normalengleichung und Koordinatengleichung einer Ebene

Die Parametergleichung einer Ebene ist zwar recht anschaulich, aber meistens sehr unpraktisch beim Rechnen.
Einfacher kann eine Ebene beschrieben werden, wenn man sie in Koordinatengleichung (Koordinatenform) bringt. Die Ebene wird dann durch eine recht einfache Gleichung beschrieben, die letztendlich auch sehr aussagekräftig ist.
Ist nun eine Ebenengleichung in Parameterform gegeben, so fasst man jede Zeile als eine Gleichung auf mit den Unbekannten λ und μ. Eliminiert man diese beiden Unbekannten, so bleibt eine, die Ebene beschreibende Gleichung übrig.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x_1 & = & 2 & + & \lambda & + & 3\mu & \quad + \quad - \\
x_2 & = & -2 & - & \lambda & + & 3\mu & \\
x_3 & = & & + & \lambda & + & \mu & \\
\hline
x_1 + x_2 & = & & & & + & 6\mu & \quad - \\
x_1 - x_3 & = & 2 & & & + & 2\mu & \quad \cdot 3 \\
\hline
-2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -6 & & & & &
\end{array}
$$

Die Koordinatengleichung der Ebene E hat somit die Form: $E: -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 6 = 0$

Es gibt auch noch einen anderen Weg um auf diese Gleichung zu kommen.
Zunächst multipliziert man die Parametergleichung der Ebene E beiderseits mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ $\left(\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}\right)$, das ist ein Vektor der auf der Ebene E senkrecht steht, so folgt:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \qquad |\, \vec{n} \circ (\ldots)$$
$$\vec{n} \circ \vec{x} = \vec{n} \circ \left(\vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}\right)$$
$$\vec{n} \circ \vec{x} = \vec{n} \circ \vec{a} + \lambda \cdot \underbrace{\vec{n} \circ \vec{u}}_{0} + \mu \cdot \underbrace{\vec{n} \circ \vec{v}}_{0}$$
$$\vec{n} \circ \vec{x} - \vec{n} \circ \vec{a} = 0$$
$$\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0$$

Diese Gleichung nennt man die <u>Normalengleichung</u> (Normalenform) der Ebene E:

$$E: \vec{n} \circ \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0$$

Rechnet man weiter, so erhält man:

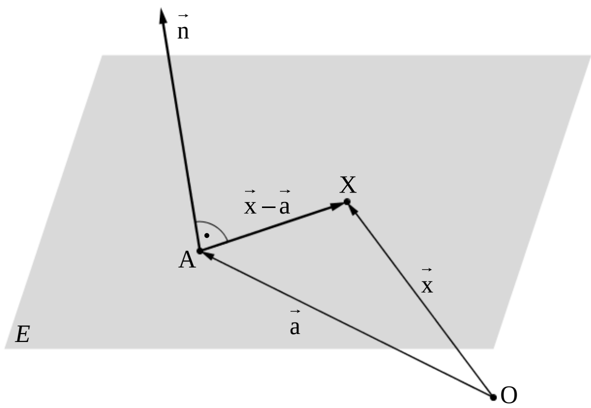
$$\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0$$
$$\vec{n} \circ \vec{x} - \underbrace{\vec{n} \circ \vec{a}}_{c} = 0$$
$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - c = 0$$
$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - c = 0$$

die <u>Koordinatengleichung</u> (Koordinatenform) der Ebene E.

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - c = 0$$

Den Normalenvektor erhält man aus den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, welche die Ebene E aufspannen. Es gilt:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$



Auch die Normalengleichung einer Ebene ist nicht eindeutig:
- Jeder Punkt der Ebene kann als Stützpunkt dienen.
- Ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor einer Ebene E, so kann auch jedes Vielfache von $\vec{n}$ als Normalenvektor dienen.

Zu ein und derselben Ebene gibt es daher unendlich viele Normalengleichungen.

Die Koordinatengleichung ist bis auf ein Vielfaches allerdings eindeutig bestimmt.

Beispiel: Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man berechnet zunächst einen Normalenvektor.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Für die Normalengleichung der Ebene E gilt: $\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0$. Somit folgt:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 + 2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(x_1 - 2\right) - 1 \cdot \left(x_2 + 2\right) - 3 \cdot x_3 = 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$$

$$E: 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$$

Multipliziert man diese Gleichung mit -1, dann hat man dieselbe Gleichung wie in obigem Beispiel.

Es geht aber auch noch etwas schneller (dabei lässt man die Normalengleichung einfach aus!!)

Hat man den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, so folgt sofort für die Koordinatengleichung:

$E: 2x_1 - x_2 - 3x_3 + c = 0$ mit einer noch zu bestimmenden Konstanten c.

Setzt man nun einen Punkt der Ebene (z. B. den Stützpunkt) in die Koordinatengleichung ein, so erhält man die Unbekannte c.

$E: 2 \cdot 2 - \left(-2\right) - 3 \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -6$

Man erhält dann für die Koordinatengleichung:

$E: 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$

Aufgaben:

8. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch folgende Punkte in der Parameter-, Normalen- und Koordinatenform.
   a) $A(-1|3|1),\ B(3|-4|1),\ C(0|0|-1)$
   b) $A(6|-2|1),\ B(-1|0|2),\ C(0|0|1)$
9. Gegeben ist die Parametergleichung einer Ebene. Bestimmen Sie die dazugehörige Normalengleichung.
   a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
   b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
   d) $E: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
10. Stellen Sie eine allgemeine Normalengleichung der Ebene E auf.
    a) E hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und geht durch $A(1|-1|0)$
    b) E ist die x_1-x_2-Ebene.
    c) E ist senkrecht zur x_2-Achse und geht durch den Punkt $A(-4|1|3)$.
    d) E geht durch $A(3|-2|5)$ und steht senkrecht zum Ortsvektor von A.
    e) E ist die Symmetrieebene zu den Punkten $A(3|5|1)$ und $B(7|-1|3)$.
11. Gegeben sind der Punkt $A(3|2|1)$ und der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.
    a) Geben Sie die Normalengleichung und die Koordinatengleichung der Ebene E an, die den Punkt A enthält und $\vec{n}$ als Normalenvektor hat.
    b) Welche der Punkte $P(1|1|0)$, $Q(2|3|-3)$ und $R(5|-1|11)$ liegen in dieser Ebene?
    c) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $S_k(-5|1|k)$ in der Ebene E liegt.
12. Stellen Sie eine allgemeine Normalengleichung für die Ebene E auf, die durch den Punkt $A(-4|1|3)$ geht und
    a) parallel zur x_1-x_2-Ebene verläuft.
    b) senkrecht zur x_2-Achse verläuft.

c) senkrecht auf der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\-1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ steht.

d) parallel zur der Ebene $F: 2x_1-x_2-x_3-8=0$ verläuft.

13. Wandeln Sie die Koordinatengleichung in eine allgemeine Normalengleichung um.

a) $E: 2x_1-x_2-5=0$

b) $E: -2x_1-x_3+8=0$

c) $E: 2x_1-x_2-x_3-8=0$

d) $F: x_2-4=0$

<u>Beispiel</u>: Bestimmen Sie zur Ebene $E: x_1-x_2+x_3-1=0$ eine mögliche Parametergleichung.
Dazu wählt man sich $x_2=\lambda$, $x_3=\mu$ und löst obige Gleichung nach x_1 auf. Man erhält:
$x_1=1+\lambda-\mu$
Fasst man diese drei Gleichung vektoriell zusammen, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{lcccccc} x_1 & = & 1 & + & \lambda & - & \mu \\ x_2 & = & & & \lambda & & \\ x_3 & = & & & & & \mu \end{array}\right\} \Rightarrow E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Aufgaben:

14. Ermitteln Sie ein Parametergleichung der Ebene E.

a) $E: \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}\right)=0$

b) $E: \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0$

c) $E: 2x_1-3x_2+x_3-5=0$

d) $E: 4x_1-2x_2+6x_3-6=0$

e) $E: x_2-2x_3=0$

f) $E: x_1-9=0$

15. Gegeben ist die Punktschar $A_t(4t\,|\,3+5t\,|\,-2t)$ mit $t\in\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass alle diese Punkte A_t auf einer Geraden g liegen. Bestimmen Sie eine Gleichung von g.

b) Für welches $t\in\mathbb{R}$ liegt der Punkt A_t in einer Ebene, die parallel zur x_2-x_3-Ebene ist und durch den Punkt $P(3|0|0)$ geht.

16. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t: (t-1)x_1+t^2x_2-x_3-2=0$ mit $t\in\mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob es eine Ebene der Schar gibt, die senkrecht auf der x_3-Achse steht.

17. Gegeben ist die Geradenschar $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2-2t \\ 2+t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in der Ebene E liegen, die durch die Punkte $A(0|0|9)$, $B(-4|-2|4)$ und $C(-5|2|5)$ bestimmt ist.
   b) Prüfen Sie, ob die Gerade durch die Punkte A und B zur Schar h_t gehört.
   c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit zwei Geraden der Schar zueinander parallel sind?

18. Gegeben ist die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

   a) Begründen Sie, dass alle Schargeraden zueinander parallel sind.
   b) Prüfen Sie, ob es eine Schargerade gibt, die durch den Ursprung geht.
   c) Zeigen Sie, dass alle Schargeraden in einer Ebene E liegen. Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform an.

19. Gegeben sind die Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar g_t in einer Ebene liegen. Geben Sie eine Normalengleichung dieser Ebene E an.
   b) Zeigen Sie, dass auch die Gerade h in der Ebene E liegt.
   c) Prüfen Sie, ob es eine Gerade der Schar g_t gibt, die zu h parallel ist.
   d) Prüfen Sie, ob die Gerade h zur Schar g_t gehört.

20. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t: tx_1 - tx_2 + x_3 - 8 = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$.

   a) Prüfen Sie, ob die Punkte $P(1|-7|9)$ und $Q(12|12|8)$ zu Ebenen der Schar E_t gehören.
   b) Prüfen Sie, ob es Ebenen der Schar gibt, die aufeinander senkrecht stehen. Welcher Zusammenhang besteht gegebenenfalls zwischen den zugehörigen Parameterwerten?