

§ 11 Parametergleichung und Koordinatenform einer Ebene – Lösungen

1. Gib eine Gleichung der Ebene E an, die durch A in Richtung von \vec{u} und \vec{v} verläuft.

$$\text{a) } A(2|0|1), \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A(0|0|0), \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechne die Punkte P_i der Ebene,

die zu den Parameterwerten λ_i und μ_i gehören.

$$\lambda_1 = 1; \mu_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 0; \mu_2 = -1$$

$$\lambda_3 = -1; \mu_3 = 4$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1(5|1|0)$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(-1|-1|-1)$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_3(9|5|-2)$$

3. Stelle die Gleichung der Ebene E auf, die durch $A(1|2|3)$ geht und parallel ist zur

a) $x_1 - x_2$ – Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $x_1 - x_3$ – Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d) Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ in der Ebene E liegt.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Beschreibe die besondere Lage der Ebene im Koordinatensystem

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Ebene E ist identisch zur $x_1 - x_2$ – Ebene

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Ebene E ist echt parallel zur $x_1 - x_3$ – Ebene

5.0 Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5.1 Bestimmen Sie vier Punkte, die auf der Ebene E liegen.

5.2 Geben Sie zwei Punkte an, die vom Aufpunktvektor den gleichen Abstand haben.

6. Überprüfen Sie, ob die Punkte $P(-1|6|0)$ und $Q(5|2|6)$ auf der Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ liegen.}$$

$P \in E; Q \notin E$

7. Ermitteln Sie eine Parametergleichung für die Ebene durch die Punkte

a) $A(1|1|-2), B(3|-2|1), C(-1|1|-2)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $A(0|-1|2), B(1|0|-3), C(2|-1|-2)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) $A(3|1|-2), B(-1|2|-3), C(0|-1|1)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch folgende Punkte in der Parameter-, Normalen- und Koordinatenform.

a) $A(-1|3|1), B(3|-4|1), C(0|0|-1)$

$$E: 14x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 5 = 0$$

b) $A(6|-2|1), B(-1|0|2), C(0|0|1)$

$$E: -2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2 = 0$$

9. Gegeben ist die Parametergleichung einer Ebene. Bestimmen Sie die dazugehörige Normalengleichung.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\text{b) } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\text{c) } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\text{d) } E: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$$

10. Stellen Sie eine allgemeine Normalengleichung der Ebene E auf.

$$\text{a) } E \text{ hat den Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und geht durch } A(1|-1|0)$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

b) E ist die $x_1 - x_2$ -Ebene.

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$$

c) E ist senkrecht zur x_2 -Achse und geht durch den Punkt $A(-4|1|3)$.

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

d) E geht durch $A(3|-2|5)$ und steht senkrecht zum Ortsvektor von A.

$$E: \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0$$

e) E ist die Symmetrieebene zu den Punkten $A(3|5|1)$ und $B(7|-1|3)$.

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \dots = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{n} = \overline{AB} = \dots = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

11. Gegeben sind der Punkt $A(3|2|1)$ und der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie die Normalengleichung und die Koordinatengleichung der Ebene E an, die den Punkt A enthält und \vec{n} als Normalenvektor hat.

$$E: \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$E: -5x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$

b) Welche der Punkte $P(1|1|0)$, $Q(2|3|-3)$ und $R(5|-1|11)$ liegen in dieser Ebene?
 $P, Q \in E; R \notin E$

c) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $S_k(-5|1|k)$ in der Ebene E liegt.
 $k = -10$

12. Stellen Sie eine allgemeine Normalengleichung für die Ebene E auf, die durch den Punkt $A(-4|1|3)$ geht und

a) parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene verläuft.

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

b) senkrecht zur x_2 -Achse verläuft.

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

c) senkrecht auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht.

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

d) parallel zur der Ebene $F: 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0$ verläuft.

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

13. Wandeln Sie die Koordinatengleichung in eine allgemeine Normalengleichung um.

a) $E: 2x_1 - x_2 - 5 = 0$

b) $E: -2x_1 - x_3 + 8 = 0$

c) $E: 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0$

d) $F: x_2 - 4 = 0$

14. Ermitteln Sie ein Parametergleichung der Ebene E.

a) $E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $E: 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5 = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) $E: 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6 = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) $E: x_2 - 2x_3 = 0$

$$E: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f) $E: x_1 - 9 = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15. Gegeben ist die Punktschar $A_t (4t | 3+5t | -2t)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass alle diese Punkte A_t auf einer Geraden g liegen. Bestimmen Sie eine Gleichung von g .

$$\begin{pmatrix} 4t \\ 3+5t \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t \\ 5t \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

- b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt A_t in einer Ebene, die parallel zur $x_2 - x_3$ -Ebene ist und durch den Punkt $P(3|0|0)$ geht.

$$E: x_1 - 3 = 0$$

$$t = \frac{3}{4}$$

16. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t: (t-1)x_1 + t^2x_2 - x_3 - 2 = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob es eine Ebene der Schar gibt, die senkrecht auf der x_3 -Achse steht.

Es gibt kein $t \in \mathbb{R}$, so dass die Ebene senkrecht auf der x_3 -Achse steht.

17. Gegeben ist die Geradenschar $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2-2t \\ 2+t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in der Ebene E liegen, die durch die Punkte $A(0|0|9)$, $B(-4|-2|4)$ und $C(-5|2|5)$ bestimmt ist.

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 18 = 0, \text{ dann } h_t \text{ in } E \text{ einsetzen!}$$

- b) Prüfen Sie, ob die Gerade durch die Punkte A und B zur Schar h_t gehört.
 c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit zwei Geraden der Schar zueinander parallel sind?

18. Gegeben ist die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

- a) Begründen Sie, dass alle Schargeraden zueinander parallel sind.
 b) Prüfen Sie, ob es eine Schargerade gibt, die durch den Ursprung geht.
 c) Zeigen Sie, dass alle Schargeraden in einer Ebene E liegen. Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform an.

19. Gegeben sind die Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar g_t in einer Ebene liegen. Geben Sie eine Normalengleichung dieser Ebene E an.
 b) Zeigen Sie, dass auch die Gerade h in der Ebene E liegt.
 c) Prüfen Sie, ob es eine Gerade der Schar g_t gibt, die zu h parallel ist.
 d) Prüfen Sie, ob die Gerade h zur Schar g_t gehört.

20. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t: tx_1 - tx_2 + x_3 - 8 = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$.

- a) Prüfen Sie, ob die Punkte $P(1|-7|9)$ und $Q(12|12|8)$ zu Ebenen der Schar E_t gehören.

- b) Prüfen Sie, ob es Ebenen der Schar gibt, die aufeinander senkrecht stehen. Welcher Zusammenhang besteht gegebenenfalls zwischen den zugehörigen Parameterwerten?

