

§ 9 Vektorprodukt

9.1 Das Vektorprodukt

Gegeben seien zwei (komplanare) Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die eine Ebene aufspannen.

Sucht man einen Vektor \vec{n} , der auf diese Ebene senkrecht steht, dann muss \vec{n} orthogonal zu \vec{a} und \vec{n} orthogonal zu \vec{b} sein.

Also gilt:

$$\vec{a} \perp \vec{n} \quad \wedge \quad \vec{b} \perp \vec{n}$$

Somit folgt:

$$\vec{a} \circ \vec{n} = 0 \Rightarrow a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0$$

$$\vec{b} \circ \vec{n} = 0 \Rightarrow b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0$$

Dieses Gleichungssystem muss man nun lösen!

Das ist allerdings nicht ganz einfach. Die Lösung lautet:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

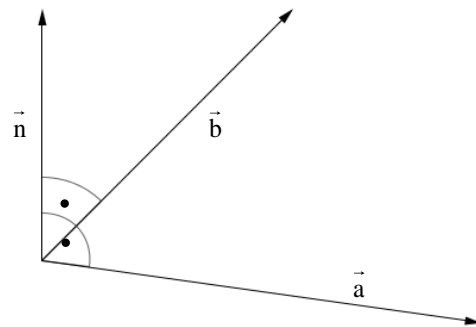
Wer es nicht glaubt, der kann nun zeigen, dass $\vec{a} \circ \vec{n} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{n} = 0$ gilt.

Definition: (Vektorprodukt)

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^3

heißt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



das Vektorprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Anmerkungen:

- Das Vektorprodukt ist nur für Vektoren des \mathbb{R}^3 definiert. Für Vektoren des \mathbb{R}^2 gibt es kein Vektorprodukt.
- Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist wieder ein Vektor. Das Skalarprodukt zweier Vektoren liefert eine Zahl (Skalar).
- Zur Berechnung des Vektorprodukts hilft zum Glück die Formelsammlung oder auch folgendes Schema:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \\ a_3 & & b_3 \end{matrix}$

Aufgaben:

1. Berechne

a)
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

c)
$$\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} =$$

d)
$$\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a-1 \\ -a \\ a \end{pmatrix} =$$

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Berechne $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ und vergleiche.b) Stelle $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar. Deute dies geometrisch.**9.2 Rechengesetze für das Vektorprodukt**Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad \text{Alternativgesetz}$$

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) \quad \text{Verträglichkeit S-Multiplikation}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{Distributivgesetz}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ sind linear unabhängig} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \text{ sind linear unabhängig}$$

9.3 Der Normalenvektor

Der Vektor \vec{n} stehe auf \vec{a} und \vec{b} senkrecht, also insbesondere auch auf die Ebene, die von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird.

Den Vektor \vec{n} nennt man Normalenvektor, er ist bis auf ein Vielfaches eindeutig festgelegt. (Anwendung: Geometrie; Physik; E-Technik; Maschinenbau; Bauingenieur)

Definition: Den Normalenvektor \vec{n} zu den Vektoren \vec{a} und \vec{b} erhält man durch das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von \vec{a} und \vec{b} . Es gilt:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also: $\vec{n} \circ \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{b} = 0$

Die Richtung des Normalenvektors $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ lässt sich mit der Rechten-Hand-Regel bestimmen:

Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Vektors \vec{a} , der Zeigefinger in Richtung des Vektors \vec{b} , dann zeigt der (rechtwinklig) gespreizte Mittelfinger in die Richtung des Normalenvektors \vec{n} . Der Normalenvektor steht dabei auf der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Ebene senkrecht.

Die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden somit in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Beispiel 1:

Ein Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} übt auf ein mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegtes Teilchen, das die Ladung Q trägt die (Lorentz-) Kraft \vec{F}_L aus.

$$\vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Beispiel 2:

Eine Kraft \vec{F} die auf den Kraftarm \vec{r} wirkt übt ein Drehmoment \vec{M} aus.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

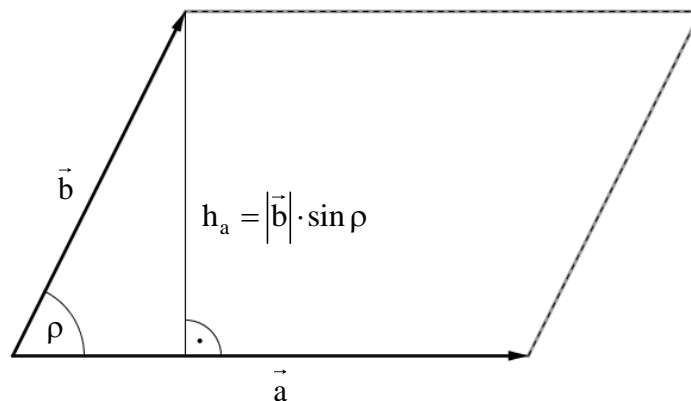
9.4 Flächenberechnung

Es stellt sich die Frage, was die Länge des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ angibt?
Damit keine Wurzeln auftreten berechnen wir

$$\begin{aligned}
 |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= \left(\begin{array}{l} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \right)^2 \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
 &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\
 &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 + \\
 &\quad \underbrace{+ a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 - (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2)}_{\text{Trick!}} \\
 &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 - \\
 &\quad - (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_2 a_3 b_2 b_3 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_1 a_2 b_1 b_2) \\
 &= a_1^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \circ \vec{b}|^2 = a^2 b^2 - (ab \cos \rho)^2 \\
 &= a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \rho \\
 &= a^2 b^2 (1 - \cos^2 \rho) \\
 &= a^2 b^2 \sin^2 \rho \\
 &= (ab \sin \rho)^2
 \end{aligned}$$

$$\cos \rho = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ab} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = ab \cos \rho$$

also: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (ab \sin \rho)^2 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \rho$



$$ab \sin \rho = ah_a = F_{\text{Parallelogramm}}$$

Der Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms ergibt sich aus der Länge des Vektorprodukts von \vec{a} und \vec{b} .

$$F_p = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \rho$$

Für den Flächeninhalt des von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Dreiecks ABC gilt dann:

$$F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Aufgaben:

3. Berechne die Fläche des Parallelogramms ABCD

Zusatz: Berechne auch den Umfang, die Innenwinkel und die Koordinaten des Punktes D des Parallelogramms!

a) $A(0|0|0)$, $B(1|0|-3)$, $C(-4|6|-1)$

b) $A(1|0|-1)$, $B(1|-3|3)$, $C(5|3|2)$

4. Berechne die Fläche des Dreiecks ABC

Zusatz: Berechne auch den Umfang und die Innenwinkel des Dreiecks!

a) $A(-2|2|-3)$, $B(0|0|0)$, $C(3|-2|0)$

b) $A(3|2|-1)$, $B(5|-2|1)$, $C(7|-2|-5)$

5. Bestimme die Länge der Höhe h_c im Dreieck ABC mit

$A(5|2|6)$, $B(7|0|9)$, $C(0|-2|1)$

6. Ein Dreieck ABC wird von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

a) Berechne sämtliche Innenwinkel.

b) Berechne die Fläche des Dreiecks ABC.

c) Berechne die Höhen h_a , h_b und h_c .

7. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ 23 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 22 \\ -2a \end{pmatrix}$

a) Berechne $a \in \mathbb{R}$ so, dass das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Dreieck gleichschenkelig ist.

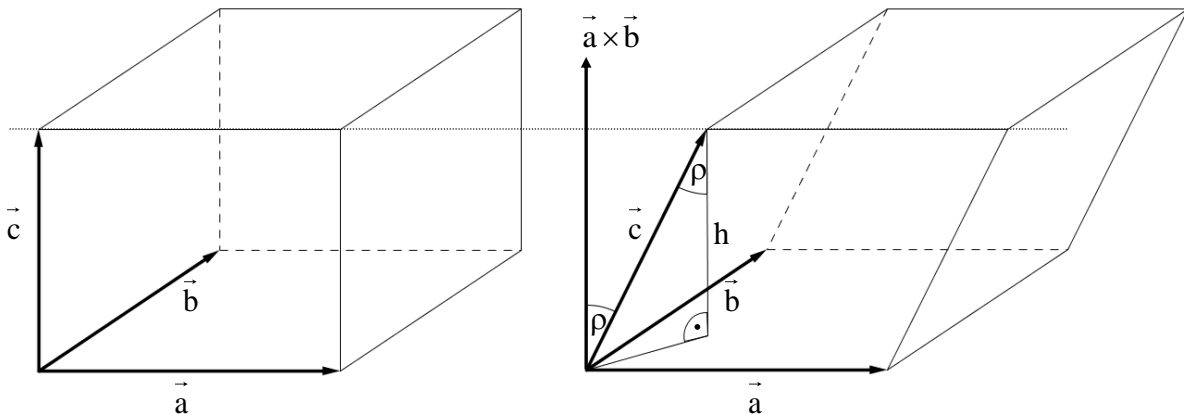
b) Berechnen Sie für $a = 7$ einen Vektor, der den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} halbiert.

c) Berechnen Sie die Höhe h_c .

d) Berechnen Sie den Vektor h_c .

9.5 Volumenberechnung

Schert man ein gerades Prisma parallel zur Grundfläche, dann bleiben Grundfläche und Höhe gleich. Nach CAVALIERI ist dann auch das Volumen gleich $V = G \cdot h$



Es gilt:

$$G = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

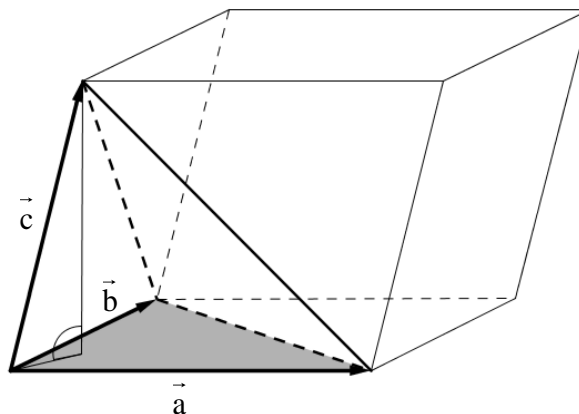
$$\cos \rho = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c |\cos \rho| = |\vec{c}| \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$V_{\text{Spat}} = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

Wird ein Spat durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt, so gilt für sein Volumen:

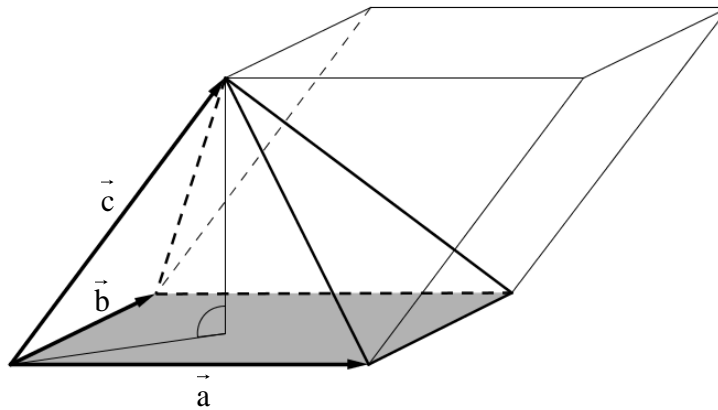
$$V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

Für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide (reguläres Tetraeders), das von den Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt wird, gilt:



$$V_{\text{3-seitige Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| = \frac{1}{6} \cdot |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

Für das Volumen einer vierseitigen Pyramide, das von den Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt wird gilt:



$$V_{\text{4-seitige Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| = \frac{1}{3} \cdot |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

Aufgaben:

8. Berechne das Volumen V des von \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Prismas:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Berechne das Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCS

a) $A(1|1|1), B(1|4|4), C(4|1|4), S(4|4|1)$

b) $A(-1|-1|-1), B(0|0|-2), C(0|-2|0), S(-2|0|0)$

c) $A(0|0|0), B(1|2|3), C(4|5|6), S(7|8|9)$

10. Berechne das Volumen der (vierseitigen) Pyramide ABCDS mit

$A(1|1|5), B(5|1|5), C(2|5|5), D(0|3|5), \text{ Spitze } S(4|1|-1)$