

§ 9 Vektorprodukt - Lösung

1. Berechne

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \cdot 20 - 25 \cdot (-12) \\ 25 \cdot 4 - 5 \cdot 20 \\ 5 \cdot (-12) - (-15) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind parallel}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a-1 \\ -a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1) \cdot a - (-a) \cdot (-a) \\ a \cdot a - (-a) \cdot (a-1) \\ a \cdot (-a) - (a+1) \cdot (a-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a^2 + a \\ -2a^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{2. Gegeben sind die Vektoren } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ und vergleiche.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}; \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}$$

b) Stelle $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar. Deute dies geometrisch

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -14\vec{a} + 8\vec{b}$$

Bedeutung: Der Vektor $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ liegt in der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Ebene.

3. Berechne die Fläche des Parallelogramms ABCD

Zusatz: Berechne auch den Umfang, die Innenwinkel und die Koordinaten des Punktes D des Parallelogramms!

$$\text{a) } A(0|0|0), B(1|0|-3), C(-4|6|-1)$$

$$F = 23; D(-5|6|2); U = 2(\sqrt{10} + \sqrt{65}) \approx 22,45; \alpha = \gamma = 64,44^\circ; \beta = \delta = 115,56^\circ$$

$$\text{b) } A(1|0|-1), B(1|-3|3), C(5|3|2)$$

$$F = 29; D(5|6|-2); U = 10 + 2\sqrt{53} \approx 24,6; \alpha = \gamma = 127,18^\circ; \beta = \delta = 52,82^\circ$$

4. Berechne die Fläche des Dreiecks ABC

Zusatz: Berechne auch den Umfang und die Innenwinkel des Dreiecks!

a) $A(-2|2|-3), B(0|0|0), C(3|-2|0)$ $F = 5,5$

b) $A(3|2|-1), B(5|-2|1), C(7|-2|-5)$ $F = 14$

5. Bestimme die Länge der Höhe h_c im Dreieck ABC mit

$A(5|2|6), B(7|0|9), C(0|-2|1)$ $h_c = 7$

6. Ein Dreieck ABC wird von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

a) Berechne sämtliche Innenwinkel.

b) Berechne die Fläche des Dreiecks ABC.

c) Berechne die Höhen h_a, h_b und h_c .

7. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ 23 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 22 \\ -2a \end{pmatrix}$

a) Berechne $a \in \mathbb{R}$ so, dass das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Dreieck gleichschenkelig ist.

b) Berechnen Sie für $a = 7$ einen Vektor, der den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} halbiert.

c) Berechnen Sie die Höhe h_c .

d) Berechnen Sie den Vektor h_c .

8. Berechne das Volumen V des von \vec{u}, \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Prismas:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $V = 72$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V = 8$

9. Berechne das Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCS

a) $A(1|1|1), B(1|4|4), C(4|1|4), S(4|4|1)$ $V = 9$

b) $A(-1|-1|-1), B(0|0|-2), C(0|-2|0), S(-2|0|0)$ $V = \frac{2}{3}$

c) $A(0|0|0), B(1|2|3), C(4|5|6), S(7|8|9)$ $V = 0$

10. Berechne das Volumen der (vierseitigen) Pyramide ABCDS mit

$A(1|1|5), B(5|1|5), C(2|5|5), D(0|3|5),$ Spitze $S(4|1|-1)$ $V = 16$