

## § 8 Längenberechnungen – Winkelberechnungen - Skalarprodukt

Wir wissen, wie man zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  addiert ( $\vec{a} + \vec{b}$ ) bzw. subtrahiert ( $\vec{a} - \vec{b}$ ).

Man kann zwei Vektoren aber auch miteinander „multiplizieren“!

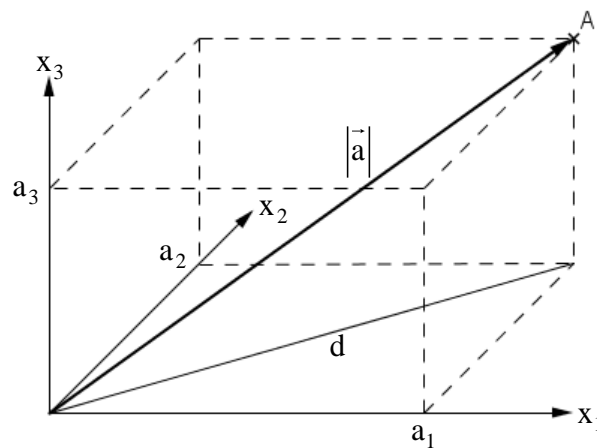
In der analytischen Geometrie gibt es zwei Arten der Vektor-Multiplikation. Das Skalarprodukt und das Vektorprodukt (siehe später!). Jedes dieser beiden Produkte besitzt eine eigene Schreibweise, jedes hat seine eigene Bedeutung.

### 8.1 Länge eines Vektors

Wir betrachten in einem kartesischen Koordinatensystem den Ortsvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

des Punktes A.



Die Länge eines Vektors bezeichnet man allgemein mit  $|\vec{a}|$  oder kurz  $a$ :  $|\vec{a}| = a$

Die Länge des Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  entspricht der Länge der Raumdiagonalen im

eingezeichneten Quader. Somit folgt:

$$a^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Definition: (Länge eines Vektors)

Der  $|\vec{a}|$  gibt die Länge des Vektors  $\vec{a}$  an. Somit gilt im

$$\mathbb{R}^2: \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\mathbb{R}^3: \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiele: Berechne die Länge der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \dots = \sqrt{29}$$

$$|\vec{b}| = \dots = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{c}| = \dots = 1 \\ |\vec{d}| = \dots = 1 \end{array} \right\} \text{Einheitsvektoren}$$

Definition: (Einheitsvektoren)

Hat ein Vektor  $\vec{a}$  die Länge 1, so nennt man ihn auch einen Einheitsvektor. Dafür schreibt man:

$$\vec{a}^0$$

$$\text{Es gilt: } |\vec{a}^0| = 1$$

Möchte man den Einheitsvektor eines beliebigen Vektors  $\vec{b}$ , so gilt für diesen:

$$\vec{b}^0 = \frac{1}{b} \cdot \vec{b}$$

Das ist ein Vektor der Länge 1 in Richtung des Vektors  $\vec{b}$ .

Beispiel: Gib den Einheitsvektor des Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  an.

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}^0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## 8.2 Abstand zweier Punkte

Den Abstand der Punkte A und B erhält man aus der Länge des Vektors  $\overline{AB}$ .

Beispiel: Bestimme den Abstand der Punkt A(-4|1|3) und B(0|-2|3).

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 - (-4) \\ -2 - 1 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

**Aufgaben:**

1. Berechne die Länge der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ 16 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix}$$

2. Zeige, dass die Punkte auf einer Kugel um den Ursprung liegen:

a)  $A(26|-7|2)$ ;  $B(25|10|-2)$ ;  $C(2|14|23)$ ;  $D(-7|-14|-22)$

b)  $A(12|4|39)$ ;  $B(33|4|24)$ ;  $C(32|9|24)$ ;  $D(31|24|12)$ ;  $E(23|24|24)$

3. Berechne  $a \in \mathbb{R}$  so, dass gilt:

a)  $\left| \begin{pmatrix} 3a \\ -6a \\ 2a \end{pmatrix} \right| = 14$       b)  $\left| \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a-1 \end{pmatrix} \right| = 7$       c)  $\left| \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 2$

d)  $\left| \begin{pmatrix} a \\ a \\ a-1 \end{pmatrix} \right| = 3$       e)  $\left| \begin{pmatrix} a^2-5 \\ a \\ a^2+3 \end{pmatrix} \right| = 13$

4. a) Berechne die Einheitsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{f} = \begin{pmatrix} -3a \\ 2,4a \\ 3,2a \end{pmatrix}$$

b) Berechne  $a \in \mathbb{R}$ , dass folgende Vektoren zu Einheitsvektoren werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -a \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:

a)  $A(6|3|-4)$ ,  $B(8|6|2)$ ,  $C(2|9|8)$

b)  $A(1|-6|-6)$ ,  $B(2|2|-2)$ ,  $C(0|-2|2)$

6. Weise nach, dass  $M(0|1|2)$  der Mittelpunkt einer Kugel ist, auf der die Punkte

$A(2|-1|3)$ ,  $B(2|0|4)$  und  $C(-1|3|4)$  liegen.

7. Berechne den Mittelpunkt der Kugel durch die vier Punkte  $A(1|-4|2)$ ,  $B(7|5|5)$ ,

$C(4|-3|0)$  und  $D(-1|0|-4)$ .

(Setze dazu  $M(x_1|x_2|x_3)$  allgemein an und stelle drei Gleichungen auf!)

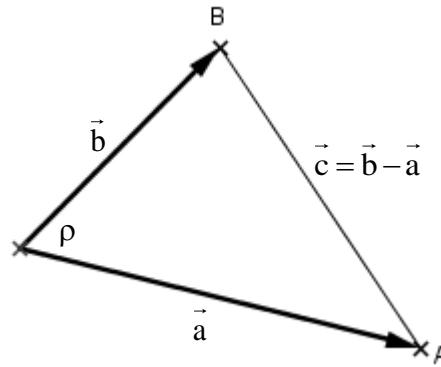
8. Gegeben sind die Punkte  $P(1|2|8)$  und  $T(4|4+t|6+t)$  mit  $t \in \mathbb{R}$ . Bestimme  $t \in \mathbb{R}$  so, dass die beiden Punkte einen Abstand von 5 LE haben. Gib T an!

### 8.3 Winkelberechnungen

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  schließen einen Winkel  $\rho = \sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$  ein.

Sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  gegeben, so benötigen wir jetzt noch den Vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Nach dem Kosinussatz gilt dann:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \rho$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \rho$$

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \rho$$

$$b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2a_3b_3 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \rho$$

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \rho$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \rho$$

Definition: Die Zahl  $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$  heißt Skalarprodukt der Vektoren

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

$$\text{Somit gilt: } \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \rho \Rightarrow \boxed{\cos \rho = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ab}}$$

Und mit Hilfe der Einheitsvektoren von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$\cos \rho = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \circ \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}^0 \circ \vec{b}^0$$

**Aufgaben:**

9. Berechne den Winkel zwischen den beiden Vektoren

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Satz: Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  stehen genau dann aufeinander senkrecht (sind zueinander orthogonal), wenn gilt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

10. Zeige, dass die gegebenen Vektoren einen Würfel aufspannen und berechne sein Volumen.

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a(a+1) \\ a \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} a(a+1) \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}$

11. Für welche Werte von  $u$  sind die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal?

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}$

12. Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} k-2 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$  mit  $k \in \mathbb{R}$ . Bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so,

dass  $\rho = \sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$  folgende Werte annimmt:

- a)  $\rho = 90^\circ$
- b)  $\rho = 60^\circ$
- c)  $\rho = 120^\circ$
- d)  $\rho = 45^\circ$

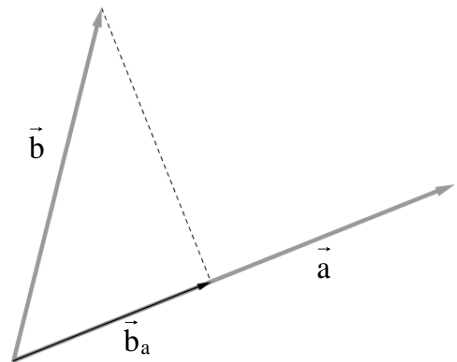
13. Berechne die Winkel des Dreiecks ABC

- a)  $A(6|3|-4), B(8|6|2), C(2|9|8)$
- b)  $A(1|-6|-6), B(2|2|-2), C(0|-2|2)$

14. Gegeben sind die beiden Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie die orthogonale

Projektion  $\vec{b}_a$  von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$ .



#### 8.4 Winkelhalbierender Vektor

Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , die einen beliebigen Winkel  $\rho$  einschließen. Für einen winkelhalbierenden Vektor  $\vec{w}$  gilt:

$$\vec{w} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Bemerkung: Für die Länge eines Vektors gilt auch:

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Rechengesetze für das Skalarprodukt:

- (1) Kommutativgesetz:  $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- (2) Distributivgesetz:  $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$
- (3) Gemischtes Assoziativgesetz:  $r(\vec{a} \circ \vec{b}) = (r\vec{a}) \circ \vec{b}$  mit  $r \in \mathbb{R}$
- (4) Für jeden Vektor  $\vec{a} \in V$  mit  $\vec{a} \neq \vec{0}$  gilt:  $\vec{a} \circ \vec{a} > 0$

Ein Vektorraum in dem ein Skalarprodukt definiert ist, heißt *euklidisch*.

Ein Assoziativgesetz gibt es für das Skalarprodukt nicht.