§ 8 Skalarprodukt - Lösung

1. Berechne die Länge der Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{a}\right|=13$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-12\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{b}\right|=13$$

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}12\\-15\\16\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{c}\right|=25$$

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{d}\right|=\sqrt{a^4+2a^3+3a^2+2a+1}$$

2. Zeige, dass die Punkte auf einer Kugel um den Ursprung liegen:
   a) $A(26|-7|2); B(25|10|-2); C(2|14|23); D(-7|-14|-22)$
   b) $A(12|4|39); B(33|4|24); C(32|9|24); D(31|24|12); E(23|24|24)$
3. Berechne $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

a) $\left|\begin{pmatrix}3a\\-6a\\2a\end{pmatrix}\right|=14$ $\qquad a_{1/2}=\pm 2$

b) $\left|\begin{pmatrix}a\\2a\\a-1\end{pmatrix}\right|=7$ $\qquad a_{1/2}=\begin{cases}-\frac{8}{3}\\3\end{cases}$

c) $\left|\begin{pmatrix}\frac{11}{5}\\a\\2\end{pmatrix}\right|=2$ $\qquad a_1=\text{n.d.}$

d) $\left|\begin{pmatrix}a\\a\\a-1\end{pmatrix}\right|=3$ $\qquad a_1=2;\ a_2=-1\tfrac{1}{3}$

e) $\left|\begin{pmatrix}a^2-5\\a\\a^2+3\end{pmatrix}\right|=13$ $\qquad a_{1/2}=\pm 3$

4. a) Berechne die Einheitsvektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}7\\14\\14\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0,5\\1\\1\end{pmatrix};\ \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix};\ \vec{e}=\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix};\ \vec{f}=\begin{pmatrix}-3a\\2,4a\\3,2a\end{pmatrix}$$

$\vec{a}^0 = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}^0 = \frac{1}{21}\cdot\begin{pmatrix}7\\14\\14\end{pmatrix}$; $\vec{c}^0 = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}0,5\\1\\1\end{pmatrix}$;

$\vec{d}^0 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e}^0 = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$; $\vec{f}^0 = \frac{1}{5a}\cdot\begin{pmatrix}-3a\\2,4a\\3,2a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,6\\0,48\\0,64\end{pmatrix}$

b) Berechne $a \in \mathbb{R}$, dass folgende Vektoren zu Einheitsvektoren werden.

$\vec{a} = \begin{pmatrix}a\\2a\\2a\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\a\\-a\end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix}a+1\\a-1\\1\end{pmatrix}$ $a_{1/2} = \pm\frac{1}{3}$; n.d.; n.d.

5. Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:
   a) $A(6|3|-4), B(8|6|2), C(2|9|8)$ $U = 30$
   b) $A(1|-6|-6), B(2|2|-2), C(0|-2|2)$ $U = 24$
6. Weise nach, dass $M(0|1|2)$ der Mittelpunkt einer Kugel ist, auf der die Punkte $A(2|-1|3)$, $B(2|0|4)$ und $C(-1|3|4)$ liegen.
7. Berechne den Mittelpunkt der Kugel durch die vier Punkte $A(1|-4|2)$, $B(7|5|5)$, $C(4|-3|0)$ und $D(-1|0|-4)$.
   (Setze dazu $M(x_1|x_2|x_3)$ allgemein an und stelle drei Gleichungen auf!)
   $\Rightarrow M(1|3|2)$
8. Gegeben sind die Punkte $P(1|2|8)$ und $T(4|4+t|6+t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimme $t \in \mathbb{R}$ so, dass die beiden Punkte einen Abstand von 5 LE haben. Gib T an!
   $t_{1/2} = \pm 2$; $T_1(4|6|8)$, $T_2(4|2|4)$

9. Berechne die Winkel zwischen den beiden Vektoren
   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}$ $\rho \approx 97,95°$
   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\0\\-8\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}12\\3\\4\end{pmatrix}$ $\rho \approx 72,08°$
   c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\rho \approx 114,79°$
   d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ $\rho = 90°$

10. Zeige, dass die gegebenen Vektoren einen Würfel aufspannen und berechne sein Volumen.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ $V_W=27$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}10\\-5\\10\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-11\\-2\\10\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\14\\5\end{pmatrix}$ $V_W=15^3=3375$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}a+1\\-a(a+1)\\a\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}a(a+1)\\a\\-a-1\end{pmatrix}$

11. Für welche Werte von u sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal?

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\u\\2u\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-u\\14\\-u\end{pmatrix}$ $u_1=0;\ u_2=6{,}5$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}u+1\\2-u\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}u\\u+2\\u+4\end{pmatrix}$ $u\in\mathbb{R}$

12. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}k-2\\2\\k\end{pmatrix}$ mit $k\in\mathbb{R}$. Bestimme $k\in\mathbb{R}$ so,

dass $\rho=\sphericalangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ folgende Werte annimmt:

a) $\rho=90°$ $k=1$

b) $\rho=60°$ $k_1=2$; $(k_2=0)$

c) $\rho=120°$ $(k_1=2)$; $k_2=0$

d) $\rho=45°$ $k_{1/2}=\begin{cases}1+\sqrt{3}\\1-\sqrt{3}\end{cases}$

13. Berechne die Winkel des Dreiecks ABC

a) $A(6|3|-4), B(8|6|2), C(2|9|8)$ $\alpha=33{,}4°$ $\beta=121{,}6°$ $\gamma=25{,}2°$

b) $A(1|-6|-6), B(2|2|-2), C(0|-2|2)$ $\alpha=15{,}1°$ $\beta=14{,}4°$ $\gamma=150{,}5°$

14. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ und

$\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die orthogonale

Projektion $\vec{b}_a$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.