

§ 7 Basis und Dimension eines reellen Vektorraums

7.1 Basis und Dimension

Sind \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und \vec{a}_3 drei linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^3 , so lässt sich jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig als Linearkombination der Vektoren \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und \vec{a}_3 in der Form

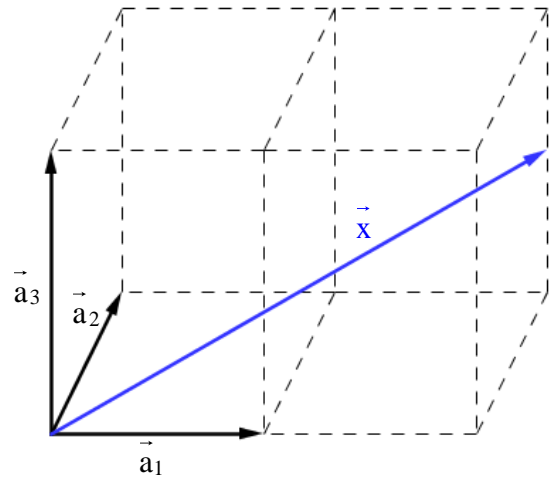
$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3$$

darstellen.

Im rechten Beispiel gilt:

$$\vec{x} = 2 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 + 0,5 \cdot \vec{a}_3$$

Im \mathbb{R}^3 sind genau drei linear unabhängige Vektoren \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und \vec{a}_3 notwendig, um jeden beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit diesen Vektoren darstellen zu können.



Definition: (Basis)

Jede Menge linear unabhängiger Vektoren, aus denen sich jeder Vektor des Raumes \mathbb{R}^3 bzw. der Ebene \mathbb{R}^2 erzeugen lässt, nennt man eine Basis des \mathbb{R}^3 bzw. des \mathbb{R}^2 .

Jede Basis des \mathbb{R}^2 besteht aus zwei, jede Basis des \mathbb{R}^3 aus drei linear unabhängigen Vektoren.

Definition: (Dimension)

Die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden nennt man die Dimension

Somit ist die Ebene zweidimensional und der Anschauungsraum dreidimensional.

Aufgaben:

1.) Entscheiden und begründen Sie, ob die Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.) Prüfen Sie, ob folgende Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

7.2 Koordinatendarstellung bezüglich einer Basis

Betrachtet man eine Basis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ des \mathbb{R}^3 , so lässt sich jeder beliebiger Vektor

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig in der Form

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 \cdot \vec{b}_2 + x_3 \cdot \vec{b}_3$$

mit reellen Zahlen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ darstellen.

Die reellen Zahlen x_1, x_2 und x_3 nennt man Koordinaten des Vektors \vec{x} bezüglich der Basis B .

Beispiel: Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B mit den

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_3 = 2 \\ & x_2 + x_3 & = 3 \\ \hline x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \Rightarrow x_1 = -2 \\ & x_2 & = -1 \Rightarrow x_2 = -1 \\ & x_2 + x_3 & = 3 \Rightarrow x_3 = 4 \end{array}$$

Somit folgt: $\vec{x} = -2 \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b} + 4 \cdot \vec{c}$

Bemerkung: Bezüglich unterschiedlicher Basen besitzt ein Vektor im Allgemeinen auch unterschiedliche Koordinaten.

Aufgaben:

4.) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basis B mit den

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basis B mit den

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

7.3 Standardbasis

Eine besonders einfache (kanonische) Basis des \mathbb{R}^3 ist gegeben durch die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatendarstellung eines beliebigen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich dieser

Basisvektoren ist sehr einfach:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

Man bezeichnet die Basisvektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3 auch als Standardbasis des \mathbb{R}^3 .

Diese Vektoren bilden zusammen mit dem Punkt O (Ursprung) das uns schon bekannte kartesische (benannt nach dem französischen Mathematiker *René Descartes*; 1596-1650) Koordinatensystem. Diese Basisvektoren haben alle die Länge 1 und stehen paarweise aufeinander senkrecht.

Aufgaben:

6.) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbb{R}^3

bilden und geben Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis an.

7.) Geben sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis an.

8.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

b) Stellen Sie die Vektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3 als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar.