§ 7 Basis und Dimension eines reellen Vektorraums - Lösung

1.) Entscheiden und begründen Sie, ob die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \neq \lambda \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind lin. unabh. $\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Basis

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind lin. abh. $\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind keine Basis

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = 3\vec{a} - 3\vec{b} \Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind lin. abh. $\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind keine Basis

2.) Prüfen Sie, ob folgende Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{Det}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -8 \neq 0$; bilden somit eine Basis

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{Det}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -27 \neq 0$; bilden somit eine Basis

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{Det}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$; bilden somit keine Basis

3.) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $k \in \mathbb{R}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ $\quad$ $k \neq 0$

4.) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basis B mit den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{c} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

5.) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basis B mit den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

a) $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{x}=4\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$

6.) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{c}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und geben Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis an.

$\vec{a}=2\vec{c}_1+\vec{c}_2+2\vec{c}_3$

7.) Geben sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis an.

$\vec{a}=-3\vec{e}_1+\vec{e}_2+4\vec{e}_3$

8.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar

.