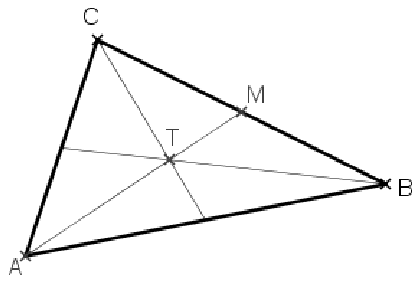
§ 6 Teilverhältnisse

Aus der Geometrie der Dreiecke kennt man die Aussage, dass der Schwerpunkt T eines Dreiecks die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt.



Für die Strecken $\overline{AT}$ und $\overline{TM}$ gilt gemäß der Abbildung

$$\overline{AT}:\overline{TM}=2:1 \text{ bzw. } \overline{AT}=\frac{2}{3}\cdot\overline{AM}$$

Drückt man diesen Sachverhalt durch Vektoren aus, so sind $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TM}$ parallele Vektoren, d.h.

$$\overrightarrow{AT}=2\cdot\overrightarrow{TM} \text{ bzw. } \overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM}$$

Betrachtet man nun allgemein drei verschieden Punkte A, B und T, die alle auf einer Geraden liegen

6.1 Innere Teilung

Liegt der Punkt T auf der Strecke $[AB]$ und teilt diese im Verhältnis $m:n$, so gilt:

$$\overline{AT}:\overline{TB}=m:n$$

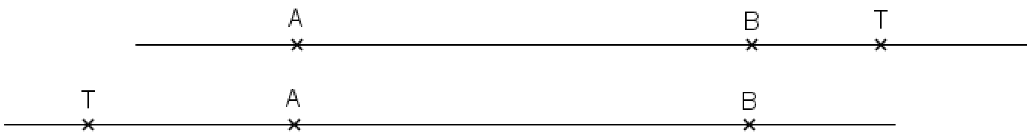
Vektoriell gilt:

$$\overrightarrow{AT}=\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{TB} \text{ bzw. } \overrightarrow{AT}=\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{AB}$$

Allgemein gilt:
Ist $\overrightarrow{AT}=\lambda\cdot\overrightarrow{TB}$ mit $\lambda\in\mathbb{R}^+$, so bezeichnet man dies als <u>innere Teilung</u> von $[AB]$ durch den Punkt T.

6.2 Äußere Teilung

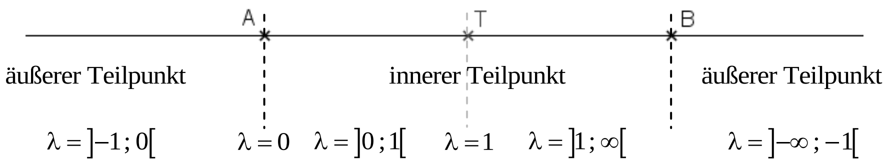
Liegt dagegen der Punkt T auf der Geraden AB, nicht aber auf der Strecke $[AB]$, dann sind die Vektoren $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TB}$ entgegengesetzt gerichtet.



In diesem Fall ist $\overrightarrow{AT}=\lambda\cdot\overrightarrow{TB}$ mit $\lambda\in\mathbb{R}^-$. Man spricht von einer äußeren Teilung der Strecke $[AB]$ durch den Punkt T.

Definition: (Teilung einer Strecke)
Seien A, B und T drei Punkte mit $T \in AB$. Die reelle Zahl λ, die durch die Bedingung $\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{TB}$ festgelegt ist heißt Teilverhältnis von T bezüglich der Strecke $[AB]$.
(Diese Definition garantiert, dass die Punkte A, B und T auf einer Geraden liegen, sie legt A als Anfangspunkt fest und liefert außerdem noch das richtige Vorzeichen von λ.
Weil für Vektoren kein Quotient definiert ist, kann man das Teilverhältnis nicht als Quotient zweier Vektoren schreiben; man muss daher in der Definition die Produktform wählen)

In der folgenden Abbildung sind die unterschiedlichen Werte von λ angegeben, wenn der zugehörige Teilpunkt T die Gerade AB durchläuft.



Dem Punkt B wird keine Zahl als Teilverhältnis zugeordnet.
Zu $\lambda = -1$ gibt es keinen Teilpunkt.

Beispiele: Ermitteln Sie, in welchem Verhältnis der Punkt T die Strecke $[AB]$ teilt. Geben Sie auch an ob der Punkt T innerer oder äußerer Teilpunkt ist und ob er näher an A oder näher an B liegt.

1.) $A(1|0|3)$, $B(1|-4|-1)$ und $T(1|-1|2)$

$$\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{TB} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \\ \lambda = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\lambda = \frac{1}{3}$ löst auch die erste Gleichung

T ist innerer Teilpunkt.
T teilt die Strecke $[AB]$ im Verhältnis 1:3 $\left(\overline{AT} : \overline{TB} = 1:3\right)$.
T liegt näher an A.

2.) $A(-1|3|2)$, $B(4|-7|7)$ und $T(-2|5|1)$

$$\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{TB} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{6} \\ \lambda = -\frac{1}{6} \\ \lambda = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

T ist äußerer Teilpunkt.
T liegt näher an A.

Aufgaben:

1.) In welchem Verhältnis teilt T die Strecke $[AB]$? Geben Sie auch an ob der Punkt T innerer oder äußerer Teilpunkt ist und ob er näher an A oder näher an B liegt.
   a) $T(10|5|7)$, $A(3|-2|0)$, $B(14|9|11)$
   b) $T(4|2|3)$, $A(16|17|12)$, $B(1|-3|2)$
   c) $T(6|t_2|t_3)$, $A(13|10|4)$, $B(3|0|-6)$; berechnen Sie t_2 und t_3
   d) $T(8|-12|-8)$, $A(-1|3|4)$, $B(2|-2|0)$

2.) P teilt $[AB]$ im Verhältnis μ. Zwischen welchen Grenzen liegt μ, wenn
   a) P zwischen A und B liegt?
   b) A zwischen B und P liegt?
   c) B zwischen A und P liegt?
   d) P zwischen A und dem Mittelpunkt von $[AB]$ liegt?

3.) $A(1|2|9)$, $B(-5|5|3)$, $C(-3|4|5)$. In welchem Verhältnis teilt
   a) C die Strecke $[AB]$?
   b) B die Strecke $[AC]$?
   c) A die Strecke $[BC]$?

6.3 Bestimmung des Teilpunktes bei gegebenen Verhältnis

Sind der Anfangspunkt A, der Endpunkt B und das Teilverhältnis λ gegeben, dann führt eine kurze Rechnung mit Ortsvektoren zum gesuchten Teilpunkt T.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AT} &= \lambda \cdot \overrightarrow{TB} \\
\vec{t} - \vec{a} &= \lambda \cdot \left(\vec{b} - \vec{t}\right) \\
\vec{t} - \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{b} - \lambda \cdot \vec{t} \\
\vec{t} + \lambda \cdot \vec{t} &= \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \\
(1+\lambda) \cdot \vec{t} &= \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \\
\vec{t} &= \frac{\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}}{1+\lambda} \quad \text{für } \lambda \neq -1
\end{aligned}$$

Ist jedoch $\lambda = -1$, so folgt aus vorletzter Gleichung: $(1+\lambda) \cdot \vec{t} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned}
0 \cdot \vec{t} &= \vec{a} - \vec{b} \\
\vec{0} &= \vec{a} - \vec{b} \\
\vec{a} &= \vec{b}
\end{aligned}$$

Also sind die beiden Punkte A und B identisch.

Aufgaben:

4.) Gegeben sind die Punkte $A(0|5|3)$ und $B(2|-5|8)$. Berechnen Sie die Teilpunkte T_i, die $[AB]$ im Verhältnis τ_i teilen: $\tau_1 = \frac{1}{2}$; $\tau_2 = 1$; $\tau_3 = -2$; $\tau_4 = -\frac{1}{3}$

5.) Gegeben sind die Punkte $T(3|-1|-6)$ und $B(-6|2|0)$. T teilt $[BA]$ im Verhältnis $\tau = \frac{3}{4}$. Berechne Sie die Koordinaten des Punktes A.

6.) Gegeben sind die Punkte $A(2|0|-1)$ und $B(8|-3|11)$. S und T teilen $[AB]$ in drei gleiche Teile. Berechnen Sie S und T.

7.) Bestimmen Sie für die Strecke $[AB]$ mit $A(3|-2|-3)$ und $B(10|5|4)$ die Koordinaten des Teilpunktes $T(0|t_2|t_3)$ und das Teilverhältnis λ.

8.) Bestimmen Sie für die Strecke $[AB]$ mit $A(3|-2|-3)$ und $B(10|5|4)$ die Koordinaten des Teilpunktes $T(t_1|t_2|0)$ und das Teilverhältnis λ.

Bemerkung: Wird die Strecke $[AB]$ durch zwei Punkte T_1 und T_2 so geteilt, dass für die zugehörigen Teilverhältnisse $\tau_1 = -\tau_2$ gilt, so sagt man, die Strecke $[AB]$ wird durch die Punkte T_1 und T_2 *harmonisch* geteilt.

9.) Gegeben sind die Punkte $A(-5|2|-3)$, $B(-2|11|9)$ und $T_1(-4|5|1)$. Bestimmen Sie den Punkt T_2 so, dass die Strecke $[AB]$ durch die Punkte T_1 und T_2 harmonisch geteilt wird.

10.) Gegeben ist für $[AB]$ der Teilpunkt $T_1(-1|2|-2)$ mit $\tau = 0{,}5$ und der Punkt $A(3|4|-6)$. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B.

6.4 Schwerpunkte

In der Physik versteht man unter dem Schwerpunkt eines Körpers den Punkt, in dem man sich die Masse des Körpers konzentriert vorstellt.

Für den Ortsvektor des Schwerpunktes S der Strecke $[AB]$ gilt:

$$\vec{s} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

Das ist aber auch gerade der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$. S teilt somit die Strecke $[AB]$ im Verhältnis $1:1$.

Für den Ortsvektor des Schwerpunktes S des Dreiecks ABC gilt:

$$\vec{s} = \tfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, er teilt diese im Verhältnis $2:1$

Für den Ortsvektor des Schwerpunktes S des Tetraeders ABCD gilt:

$$\vec{s} = \tfrac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$$

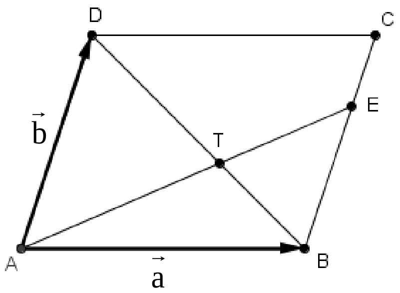
Verbindet man einen Eckpunkt des Tetraeders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Dreiecksseite, so wird diese Strecke vom Schwerpunkt des Tetraeders im Verhältnis $3:1$ geteilt.

Allgemein gilt für den Schwerpunkt des Vielecks $A_1A_2A_3...A_n$:

$$\vec{s} = \tfrac{1}{n}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + ... + \vec{a}_n\right)$$

6.5 Berechnung von Teilverhältnissen in ebenen Figuren

Beispiel: Ein Parallelogramm ABCD wird von den Vektoren $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ und $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ aufgespannt. Der Punkt E teilt die Strecke $[BC]$ im Verhältnis $2:1$. In welchem Verhältnis teilt dann der Punkt T die Strecke $[AE]$ bzw. $[BD]$?



Wir wissen $\quad \overline{BE}:\overline{EC}=2:1$ bzw. $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC}$

und suchen: $\quad \overrightarrow{BT}=\tau_1\cdot\overrightarrow{TD}$ bzw. $\overrightarrow{BT}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{BD}$

$\qquad \overrightarrow{AT}=\tau_2\cdot\overrightarrow{TE}$ bzw. $\overrightarrow{AT}=\lambda_2\cdot\overrightarrow{AE}$

Zunächst wählt man sich einen geschlossenen Streckenzug, der den Punkt T als Ecke enthält (z.B. ABTA). Dann gilt:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TA}=\vec{0} \qquad (1)$$

Dann stellt man alle Vektoren als Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar:

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$

$\overrightarrow{BT}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{BD}=\lambda_1\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$

$\overrightarrow{TA}=-\overrightarrow{AT}=-\lambda_2\cdot\overrightarrow{AE}=-\lambda_2\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)=-\lambda_2\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=-\lambda_2\cdot\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\cdot\vec{b}\right)$

mit den Unbekannten λ_1 und λ_2.

Diese Linearkombinationen setzt man in Gleichung (1) ein.

$$\vec{a}+\lambda_1\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)-\lambda_2\cdot\left(\vec{a}+\tfrac{2}{3}\cdot\vec{b}\right)=\vec{0}$$
$$\vec{a}+\lambda_1\vec{b}-\lambda_1\vec{a}-\lambda_2\vec{a}-\tfrac{2}{3}\lambda_2\vec{b}=\vec{0}$$
$$\vec{a}-\lambda_1\vec{a}-\lambda_2\vec{a}+\lambda_1\vec{b}-\tfrac{2}{3}\lambda_2\vec{b}=\vec{0}$$
$$\left(1-\lambda_1-\lambda_2\right)\cdot\vec{a}+\left(\lambda_1-\tfrac{2}{3}\lambda_2\right)\cdot\vec{b}=\vec{0}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgt dann:

$$1-\lambda_1-\lambda_2=0 \qquad (2)$$
$$\lambda_1-\tfrac{2}{3}\lambda_2=0 \qquad (3)$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man:

$$1-\tfrac{5}{3}\lambda_2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_2=\tfrac{3}{5}$$

und eingesetzt in (3):

$$\lambda_1-\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{5}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\tfrac{2}{5}$$

Jetzt folgt:

$$\overrightarrow{BT}=\tfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{BD} \qquad\qquad \overrightarrow{AT}=\tfrac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{BT}=\tfrac{2}{5}\cdot\left(\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TD}\right) \qquad\qquad \overrightarrow{AT}=\tfrac{3}{5}\cdot\left(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TE}\right)$$
$$\overrightarrow{BT}=\tfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{BT}+\tfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{TD} \qquad\qquad \overrightarrow{AT}=\tfrac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AT}+\tfrac{3}{5}\cdot\overrightarrow{TE}$$
$$\tfrac{3}{5}\cdot\overrightarrow{BT}=\tfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{TD} \qquad\qquad \tfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AT}=\tfrac{3}{5}\cdot\overrightarrow{TE}$$
$$\overrightarrow{BT}=\tfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{TD} \quad\Rightarrow\quad \tau_1=\tfrac{2}{3} \qquad\qquad \overrightarrow{AT}=\tfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{TE} \quad\Rightarrow\quad \tau_2=\tfrac{3}{2}$$

T teilt die Strecke $[BD]$ im Verhältnis $2:3$.

T teilt die Strecke $[AE]$ im Verhältnis $3:2$.

Aufgaben:

11.) Ein Rechteck ABCD wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ aufgespannt. Der Punkt E teilt die Strecke $[BC]$ im Verhältnis $1:3$. Berechnen Sie in welchem Verhältnis die Diagonale $[BD]$ die Strecke $[AE]$ teilt. (Fertigen Sie zunächst eine Skizze an)

12.) Ein Rechteck ABCD wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ aufgespannt. Die Strecke $[AB]$ wird durch E im Verhältnis $4:1$, $[BC]$ durch F im Verhältnis $1:1$ geteilt, Wie teilen sich folgende Strecken? (Skizze!)

a) $[AF]$ und $[CE]$

b) $[AF]$ und $[DE]$

c) $[DF]$ und $[EC]$

13.) Ein Parallelogramm ABCD wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ aufgespannt. E teilt die Strecke $[AD]$ im Verhältnis $3:2$, F die Seite $[BC]$ im Verhältnis $1:3$. Wie teilen sich die Strecken $[CE]$ und $[DF]$? (Skizze!)

14.) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt.