§ 5 Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit von Vektoren

5.1 Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit von Vektoren

Eine besondere Rolle in der analytischen Geometrie spielt die Linearkombination des Nullvektors $\vec{0}$. So besitzt die Vektorgleichung (Linearkombination)

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n$$

stets die trivialen Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Es stellt sich aber die Frage, ob es neben dieser trivialen Lösung nicht doch noch eine nichttriviale Lösung gibt.

Beispiele:

1. Überprüfen Sie auf welche Art sich der Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen lässt.

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{ccccccc:l} \lambda_1 & & & & & = & 0 & \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 & \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \Rightarrow \lambda_3 = 0 \end{array}$$

Der Nullvektor $\vec{0}$ lässt sich somit eindeutig <u>nur</u> auf <u>triviale</u> Art als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

2. Überprüfen Sie auf welche Art sich der Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen lässt.

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\
\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 & \\
& & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\
\hline
\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\
& - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 & \\
& & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\
\hline
\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -2k \\
& - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 & \Rightarrow \lambda_2 = -k \\
& & & & 0 & = & 0 & \Rightarrow \lambda_3 = k
\end{array}$$

Für die Linearkombination des Nullvektors $\vec{0}$ gilt:

$$-2k \cdot \vec{a} - k \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c} = \vec{0}, \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Es gibt also unendlich viele Möglichkeiten den Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen.
Für $k = 0$ erhält man wieder die triviale Art den Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen.
Für $k = 1$ erhält man eine nichttriviale Art den Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen.

$$-2 \cdot \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung lässt sich z. Bsp. der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$$

Der Vektor $\vec{c}$ hängt somit von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ab. Man nennt die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ <u>linear abhängig</u>.
Im ersten Beispiel dagegen lässt sich keiner der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Linearkombination der beiden anderen darstellen. Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heißen deshalb <u>linear unabhängig</u>.

<u>Definition</u>:
Hat die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

i) nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, so heißen die Vektoren $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \ldots; \vec{a}_n$ linear unabhängig.
ii) eine Lösung, bei der mindestens eine der Zahlen $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$, verschieden von Null ist, so heißen die Vektoren $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \ldots; \vec{a}_n$ linear abhängig.

Aufgaben

1.) Untersuche Sie die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1{,}5\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-6\\4{,}5\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

f) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ g) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-9\end{pmatrix}$

h) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ k) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$

i) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ l) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}$

m) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{d}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ n) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Die lineare Abhängigkeit von Vektoren und diese Untersuchung mittels des Additionsverfahrens hängt auch eng mit der Determinante einer Matrix zusammen!
Da man die Determinante einer Matrix nur dann bilden kann, wenn diese quadratisch ist, macht dieses Verfahren auch nur dann Sinn, wenn man

- im zweidimensionalen zwei Vektoren
- im dreidimensionalen drei Vektoren

auf lineare Abhängigkeit untersucht.

Sind im zweidimensionalen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben, dann gilt:

$$\mathrm{Det}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind linear abhängig}$$

$$\mathrm{Det}\left(\vec{a},\vec{b}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind linear unabhängig}$$

Sind im dreidimensionalen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben, dann gilt:

$$\mathrm{Det}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind linear abhängig}$$

$$\mathrm{Det}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind linear unabhängig}$$

Überprüfen Sie obige Aussagen an je einem linear abhängigen bzw. unabhängigen Beispiel.
Somit werden nun folgende Aufgaben dann doch etwas leichter.
Verwenden Sie bei Aufgabe 2a) trotzdem beide Lösungswege!

2.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren linear abhängig?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.) Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1-t \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$

5.2 Geometrische Deutung der linearen Abhängigkeit

5.2.1 Von zwei Vektoren

Betrachtet man zwei linear abhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, dann gibt es eine Darstellung der Form

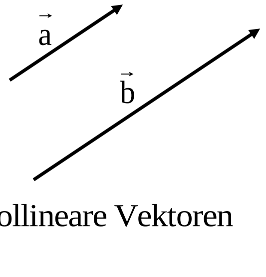
$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

die nicht beide Null sind. Löst man diese Gleichung nach $\vec{a}$ auf, so erhält man:

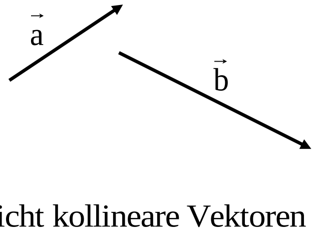
$$\vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \vec{b}$$

Der Vektor $\vec{a}$ ist also ein Vielfaches des Vektors $\vec{b}$.
Anschaulich bedeutet dies, das die beiden zugehörigen Verschiebungspfeile zueinander parallel sind.

Definiton:
Sind zwei (oder mehrere) Vektoren zueinander parallel, dann bezeichnet man sie auch als **kollinear**.



kollineare Vektoren



nicht kollineare Vektoren

5.2.2 Von drei Vektoren

Betrachtet man drei linear abhängige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dann gibt es eine Darstellung der Form

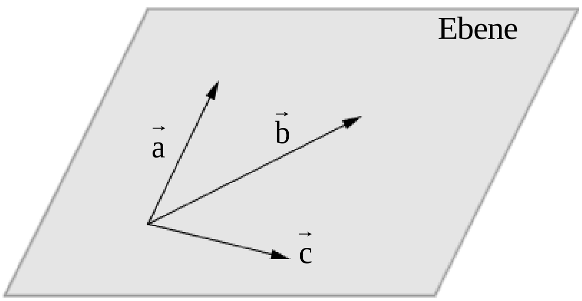
$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

die nicht alle Null sind. Gilt z.B. $\lambda_1 \neq 0$, so kann man die Gleichung nach $\vec{a}$ auflösen:

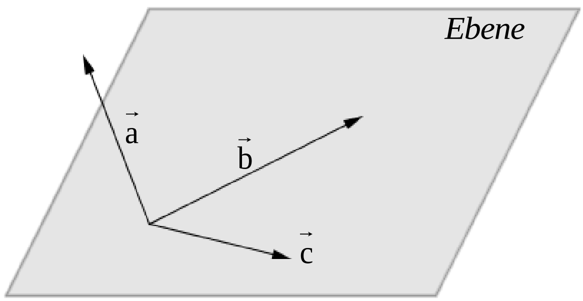
$$\vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \vec{b} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot \vec{c}$$

Der Vektor $\vec{a}$ lässt sich also als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen. Anschaulich bedeutet dies, das der Vektor $\vec{a}$ in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene liegt.

Definition:
Liegen zwei (oder mehrere) Vektoren in einer Ebene, dann bezeichnet man sie auch als **komplanar**.



komplanare Vektoren

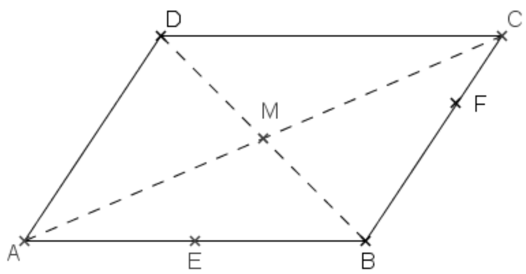


nicht komplanare Vektoren

Aufgaben

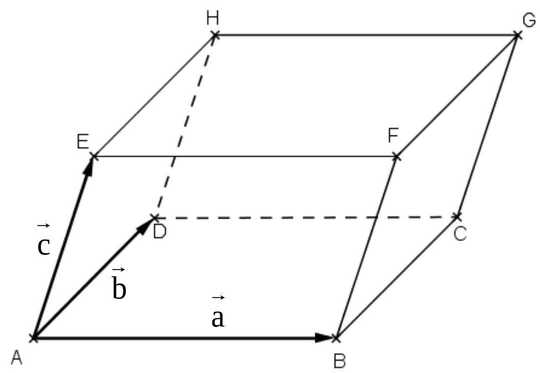
4.) Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD. M ist der Diagonalenschnittpunkt, E der Mittelpunkt von $[AB]$ und F teilt die Strecke $[BC]$ im Verhältnis $2:1$.
Lesen Sie aus der Zeichnung ab, welche der Vektoren linear abhängig sind und geben Sie eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an.

a) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$
c) $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{FC}$
d) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$
e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$



5.) Gegeben ist ein Spat.
Lesen Sie aus der Zeichnung ab, welche der Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$
b) $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BD}$
c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$
d) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HG}$
e) $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{EG}$



f) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DE}$
g) $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AB}$

6.) Bestimmen Sie den Parameter $k \in \mathbb{R}$ ohne große Rechnung so, dass die Vektoren linear abhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} -k \\ k \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -k \\ 3 \end{pmatrix}$
f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

5.3 Linearkombinationen aus linear unabhängigen Vektoren

Sind zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben, so stellt sich vielleicht auch einmal die Frage, ob z.B. auch die Linearkombinationen $\vec{a}+3\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ dieser Vektoren linear unabhängig sind.
Dazu macht man den Ansatz:

$$\lambda \cdot \left(\vec{a}+3\vec{b}\right)+\mu \cdot \left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{0}$$

Multipliziert man aus und sortiert nach den linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so erhält man:

$$\lambda \cdot \vec{a}+3\lambda \cdot \vec{b}+\mu \cdot \vec{a}-\mu \cdot \vec{b}=\vec{0}$$

$$\lambda \cdot \vec{a}+\mu \cdot \vec{a}+3\lambda \cdot \vec{b}-\mu \cdot \vec{b}=\vec{0}$$

$$(\lambda+\mu)\cdot \vec{a}+(3\lambda-\mu)\cdot \vec{b}=\vec{0}$$

Da aber $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind folgt:

$$\lambda+\mu=0$$

$$3\lambda-\mu=0$$

Löst man diese Gleichungssystem, so folgt:

$$\lambda=0 \text{ und } \mu=0$$

Das bedeutet aber, dass dann auch die Linearkombinationen $\vec{a}+3\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ linear unabhängig sind.

Aufgaben

7.) Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.
a) $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$
b) $\vec{a}+3\vec{b}$ und $2\vec{a}+5\vec{b}$
c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $-\vec{a}$
d) $\vec{a}+n\cdot\vec{b}$ und $2\vec{a}-\vec{b}$ mit $n \in \mathbb{N}$

8.) Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$

c) $\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

d) $\vec{a}$, $2\vec{a}+\vec{b}$ und $3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$

e) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $-\vec{a}-3\vec{b}+7\vec{c}$

9.) Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ und $\vec{c}-\vec{a}$

b) $2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-3\vec{c}$ und $3\vec{a}-2\vec{c}$

c) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{c}$

d) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ und $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

e) $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $-\vec{a}-5\vec{b}+7\vec{c}$ und $\vec{a}-\vec{b}$