§ 5 Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit von Vektoren - Lösung

1.) Untersuche Sie die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ linear abhängig

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ linear abhängig

h) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

k) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

l) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ linear abhängig

m) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear abhängig

n) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

2.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren linear abhängig?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Det}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 48t - 192 = 0 \Rightarrow t = 4$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Det}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -t^2 + t + 6 \Rightarrow t_{1/2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$

3.) Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Det}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = t - 2 = 0 \Rightarrow \quad \Rightarrow t = 2 \Rightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1-t \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Det}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 2\left(1+t^2\right)^2 = 2t^4 + 4t^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow t \in \mathbb{R}$$

4.) Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD. M ist der Diagonalenschnittpunkt, E der Mittelpunkt von $[AB]$ und F teilt die Strecke $[BC]$ im Verhältnis $2:1$.

Lesen Sie aus der Zeichnung ab, welche der Vektoren linear abhängig sind und geben Sie eine nichttriviale Darstellung des Nullvnektors an.

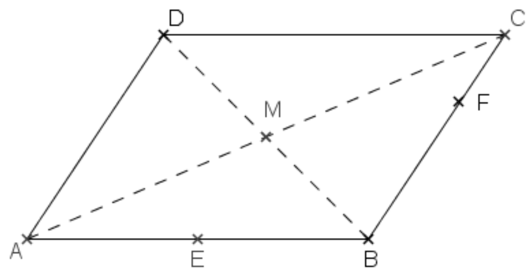
a) $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CD}$ lin. abh. $2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ lin. unabh.

c) $\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{FC}$ lin. abh. $2\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EF}$ lin. unabh.

e) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ lin. abh. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$



5.) Gegeben ist ein Spat.

Lesen Sie aus der Zeichnung ab, welche der Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{HF}$ lin. unabh.

b) $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BD}$ lin. unabh.

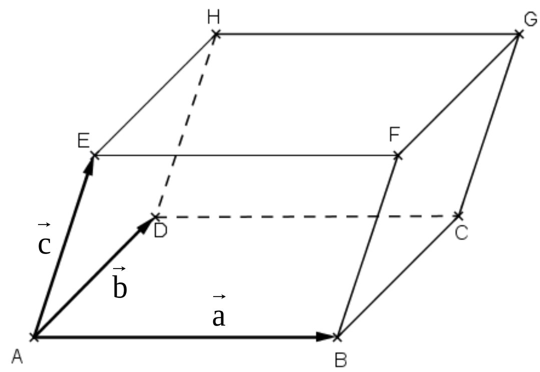
c) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ lin. unabh.

d) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HG}$ lin. abh.

e) $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}$ lin. unabh.

f) $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE}$ lin. unabh.

g) $\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{AB}$ lin. unabh.



6.) Bestimmen Sie den Parameter $k \in \mathbb{R}$ ohne große Rechnung so, dass die Vektoren linear abhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -k \\ k \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -k \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

7.) Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

a) $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$

b) $\vec{a}+3\vec{b}$ und $2\vec{a}+5\vec{b}$

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $-\vec{a}$

d) $\vec{a}+n\cdot\vec{b}$ und $2\vec{a}-\vec{b}$ mit $n \in \mathbb{N}$

8.) Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$

c) $\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

d) $\vec{a}$, $2\vec{a}+\vec{b}$ und $3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$

e) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $-\vec{a}-3\vec{b}+7\vec{c}$

9.) Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ und $\vec{c}-\vec{a}$

b) $2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-3\vec{c}$ und $3\vec{a}-2\vec{c}$

c) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{c}$

d) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ und $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

e) $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $-\vec{a}-5\vec{b}+7\vec{c}$ und $\vec{a}-\vec{b}$