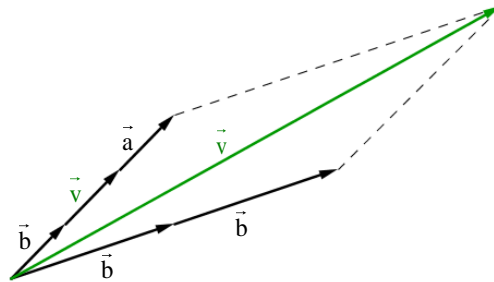


§ 4 Linearkombination von Vektoren

Definition: Ein Vektor \vec{v} heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ wenn gilt:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Beispiel:

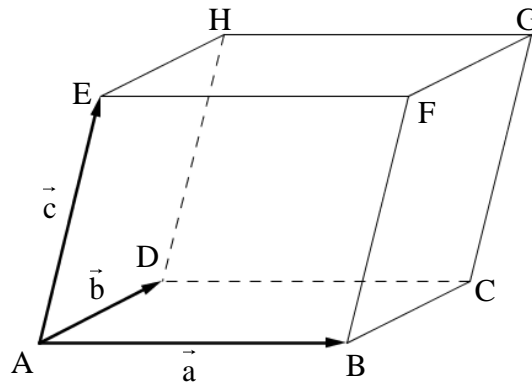


Für den Vektor \vec{v} gilt: $\vec{v} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$

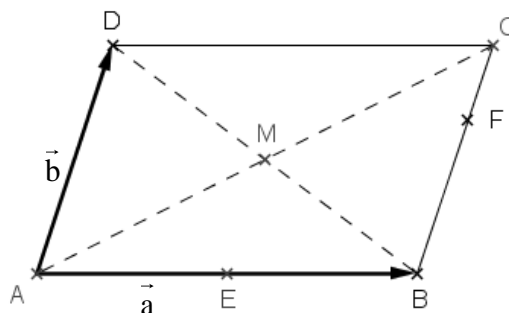
Man sagt: Der Vektor \vec{v} ist eine Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

4.1 Bestimmung von Linearkombinationen mittels einer Vektorkette

- Gegeben ist ein Spat, der durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt wird.
 Schreiben Sie die Vektoren \vec{AC} , \vec{BE} , \vec{BG} und \vec{HB} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .

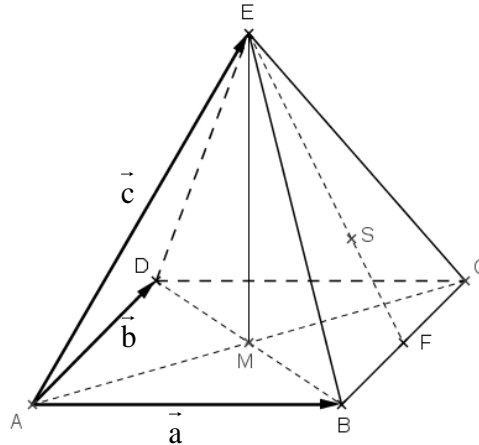


- Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD, das durch die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird. E halbiert die Strecke $[AB]$, F teilt die Strecke $[BC]$ im Verhältnis 2:1 und M ist der Schnittpunkt der Diagonalen.
 Schreiben Sie die Vektoren \vec{AM} , \vec{MD} , \vec{DE} , \vec{AF} , \vec{EM} und \vec{MF} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .



3. Eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche wird durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt. M ist der Mittelpunkt des Rechtecks ABCD, S der Schwerpunkt des Dreiecks BCE.

Schreiben Sie die Vektoren \vec{FS} , \vec{EM} , \vec{ES} und \vec{DS} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .



4.2 Rechnerische Bestimmung von Linearkombinationen

4. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

$$\text{Also: } \vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieser Ansatz liefert ein Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda + 2\mu \\ -3 &= 4\lambda + \mu \\ \hline 7 &= -7\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \mu = 1 \end{aligned}$$

$$\text{also: } \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$$

5. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 36 \\ 19 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

6. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

7. Stelle die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

8. Stelle den Vektor \vec{v} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar.

$$\text{a) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{v}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda - 3\mu + 2\gamma &= 1 \\ -\lambda + \mu &= 1 \\ \lambda + \mu - \gamma &= 1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem erhält man auch so:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \cdot \vec{\mu} = \vec{v} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellbar ist.

b) Zeigen Sie: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellbar.

Zeigen Sie, dass die Darstellung nicht eindeutig ist.

c) Auf welche triviale Art ist der Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellbar? Untersuchen Sie, ob sich der Nullvektor $\vec{0}$ noch auf andere Arten als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen lässt.

10. Gegeben sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} des Raumes. Prüfen Sie, ob

- $\vec{0}$ Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist.
- \vec{a} Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist.
- \vec{a} Linearkombination der Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ ist.
- \vec{b} Linearkombination der Vektoren \vec{a} , $\vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ist.

11. Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ so gibt, dass der Vektor \vec{v} Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist.

$$\text{a) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ t-2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix}$$