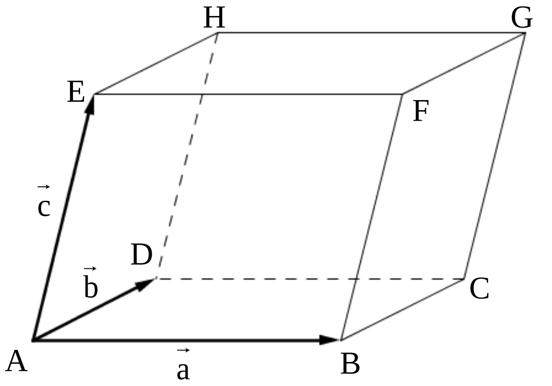
§ 4 Linearkombination von Vektoren - Lösung

1. Gegeben ist ein Spat, der durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.
   Schreiben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BG}$ und $\overrightarrow{HB}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.



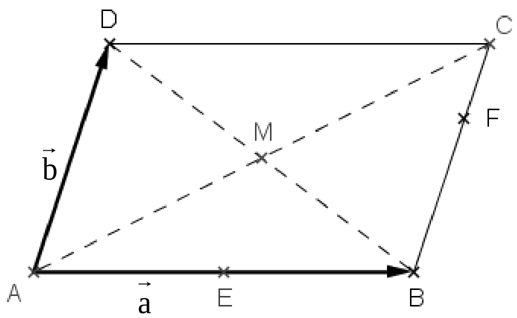
$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BE} = -\vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BG} = \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{HB} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

2. Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD, das durch die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. E halbiert die Strecke $[AB]$, F teilt die Strecke $[BC]$ im Verhältnis $2:1$ und M ist der Schnittpunkt der Diagonalen.
   Schreiben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EM}$ und $\overrightarrow{MF}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

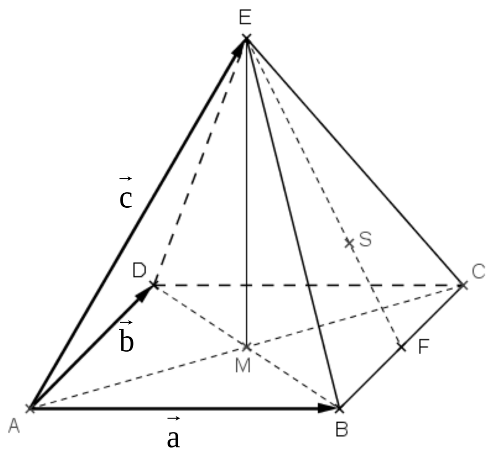
3. Eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche wird durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. M ist der Mittelpunkt des Rechtecks ABCD, S der Schwerpunkt des Dreiecks BCE.
   Schreiben Sie die Vektoren $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{ES}$ und $\overrightarrow{DS}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

$\overrightarrow{FS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FE} = ... = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{ES} = -2 \cdot \overrightarrow{FS} = ... = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ES} = ... = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$



4. Stelle den Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dar.

   Also: $\vec{v}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

   Dieser Ansatz liefert ein Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$\begin{array}{l} 1=\lambda+2\mu \\ \underline{-3=4\lambda+\mu} \\ 7=-7\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1 \quad \Rightarrow \quad \mu=1 \end{array}$$

   also: $\vec{v}=-\vec{a}+\vec{b}$

5. Stelle den Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}36\\19\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ dar.

   $\vec{v}=8\vec{a}-5\vec{b}$

6. Stelle den Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ dar.

   $\vec{v}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}=\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$$

7. Stelle die Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ dar.

Der Vektor $\vec{u}$ lässt sich nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.
Der Vektor $\vec{v}$ lässt sich nicht eindeutig als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

8. Stelle den Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

a) $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\13\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}=-6,6\vec{a}+6,4\vec{b}-6,8\vec{c}$

b) $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-12\\6\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}=-5\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$

c) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\10\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}=4\vec{a}+3\vec{b}$

d) $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}-4\\9\\1\end{pmatrix}$ nicht möglich!

e) $\vec{v}=\begin{pmatrix}7\\-5\\21\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\6\end{pmatrix}$

$$\vec{v}=(5-k)\vec{a}+(1-2k)\vec{b}+k\vec{c} \quad k\in\mathbb{R}$$

f) $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{v}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\lambda-3\mu+2\gamma&=1\\-\lambda+\mu&=1\\\lambda+\mu-\gamma&=1\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem erhält man auch so:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-3&2\\-1&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}}_{\text{Matrix}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\gamma\end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} \quad \text{bzw.} \quad \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\gamma\end{pmatrix}=\vec{v} \qquad \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \qquad \vec{v}=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$$

g) $\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$

h) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = 3\vec{a} - 12\vec{b} + 9\vec{c}$

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   a) Untersuchen Sie, ob $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellbar ist.

   $\vec{u}$ ist nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellbar!

   b) Zeigen Sie: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellbar.

   Zeigen Sie, dass die Darstellung nicht eindeutig ist.

   $\vec{u} = (-1-k)\cdot\vec{a} + k\cdot\vec{b} + (5+k)\cdot\vec{c}$ oder auch $\vec{u} = (4-k)\cdot\vec{a} + (k-5)\cdot\vec{b} + k\cdot\vec{c}$

   c) Auf welche triviale Art ist der Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellbar? Untersuchen Sie, ob sich der Nullvektor $\vec{0}$ noch auf andere Arten als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt.

   Trivial: $\lambda = \mu = \tau = 0$
   Oder: $\lambda = -k; \quad \mu = k; \quad \tau = k \quad k \in \mathbb{R}$

10. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des Raumes. Prüfen Sie, ob
    a) $\vec{0}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist.
    $\lambda = \mu = \tau = 0$
    b) $\vec{a}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist.
    $\lambda = 1; \quad \mu = \tau = 0$
    c) $\vec{a}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ ist.
    $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$
    d) $\vec{b}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ist.
    $\lambda = 1; \quad \mu - 1; \quad \tau = 0$

11. Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ so gibt, dass der Vektor $\vec{v}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$

Für $t = 1$ lässt sich der Vektor $\vec{v}$ nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

Für $t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ lässt sich der Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ t-2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix}$

Für $t = 1$ lässt sich der Vektor $\vec{v}$ nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

Für $t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ lässt sich der Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.