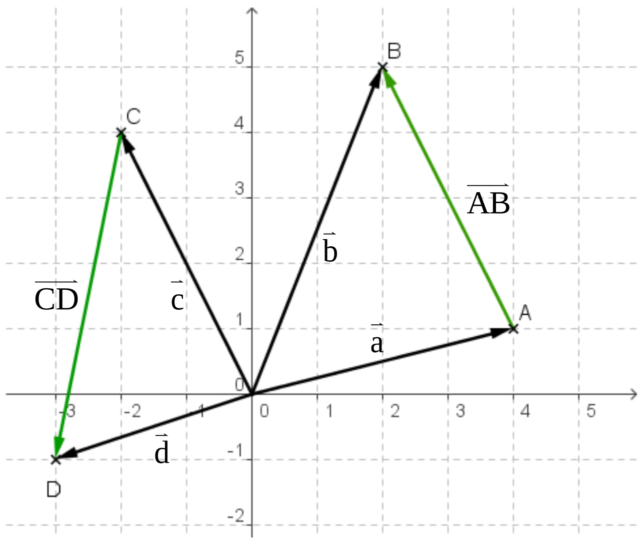
§ 3 Punkte, Ortsvektoren und Verbindungsvektoren

Zunächst im 2-dimensionalen:
Gegeben sind die <u>Punkte</u> $A(4|1)$, $B(2|5)$, $C(-2|4)$ und $D(-3|-1)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.



Zu jedem Punkt P im Koordinatensystem gibt es einen Pfeil, der im Ursprung beginnt und in P endet. Dieser Pfeil legt eindeutig einen Vektor $\overrightarrow{0P}$ fest, den wir den <u>Ortsvektor</u> des Punktes P nennen und kurz mit $\vec{p}$ bezeichnen. Die Vektorkoordinaten von $\vec{p}$ stimmen mit den Punktkoordinaten von P überein.

Hier also: $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ $\vec{d}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

Den Vektor, der im Punkt A beginnt und im Punkt B endet nennt man den <u>Verbindungsvektor</u> $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-(-2)\\-1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$$

Im 3-dimensionalen:
Gegeben sind die Punkte $A(3|2|-5)$, $B(1|1|1)$, $C(-5|-1|)$ und $D(0|1|-4)$

Ortsvektoren: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}$

Verbindungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, ...

Vektorrechnung
Vektoren werden addiert bzw. subtrahiert, indem man zeilenweise addiert bzw. subtrahiert.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5 \\ -1+2 \\ 6+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

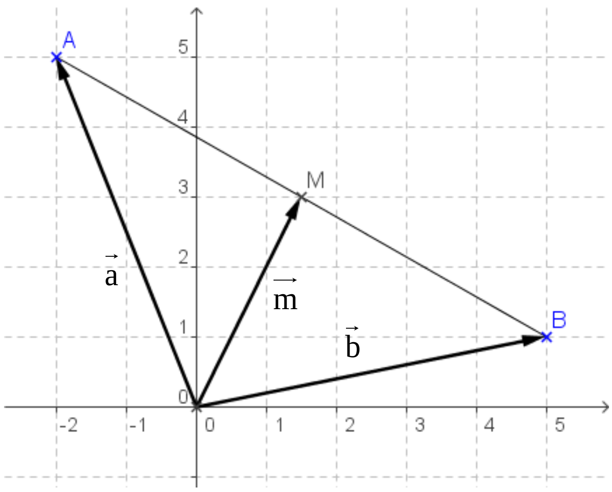
Bei der Skalar-Multiplikation wird die Zahl (Skalar) mit jeder Zeile multipliziert.

$$2 \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) \\ 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Gegeben sind die Punkte $A(1|2|-3)$, $B(-3|2|0)$ und $C(0|-4|7)$.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ergibt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Parallelogramms sowie die Koordinaten des Punktes L, der genau zwischen C und D liegt.

Besondere Ortsvektoren

- Mittelpunkt einer Strecke:
  Gegeben sind die Punkte $A(-2|5)$ und $B(5|1)$. Ermitteln Sie den Mittelpunkt M der Strecke $[AB]$.



Es gilt: $\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

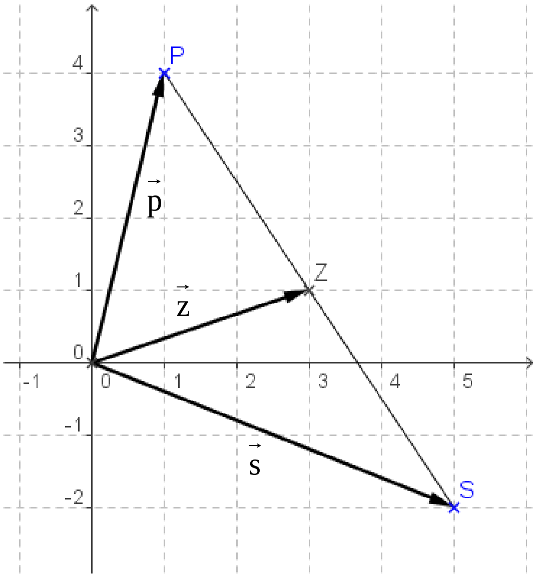
Also: $\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Punkt M hat somit die Koordinaten $M(1{,}5\,|\,3)$

Allgemein gilt für den Mittelpunkt der Strecke $[AB]$:

$$\vec{m} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

- Spiegelpunkt:
  Gegeben sind die Punkte $P(1\,|\,4)$ und $Z(3\,|\,1)$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S, den man durch spiegeln des Punktes P am Punkt Z erhält.



Es gilt: $\vec{s} = \vec{p} + \overrightarrow{PS} = \vec{p} + 2\cdot\overrightarrow{PZ} = \vec{p} + 2\cdot\left(\vec{z} - \vec{p}\right) = \vec{p} + 2\cdot\vec{z} - 2\cdot\vec{p} = 2\cdot\vec{z} - \vec{p}$

Also: $\vec{s} = 2\cdot\vec{z} - \vec{p} = 2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

Der Punkt S hat somit die Koordinaten $S(5\,|\,-2)$

Allgemein gilt für den Spiegelpunkt S des Punktes P bezüglich des Spiegelpunktes Z:

$$\vec{s} = 2\cdot\vec{z} - \vec{p}$$

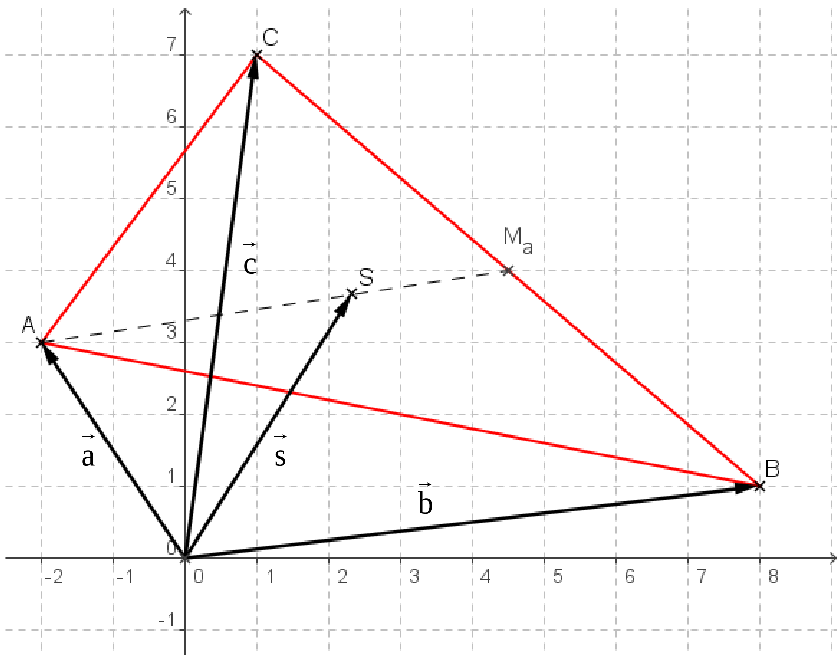
Einfacher kommt man auf dieses Ergebnis, wenn man so ansetzt, dass der Punkt Z als Mittelpunkt der Strecke $[PS]$ gesehen wird. Also:

$$\vec{z} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{p} + \vec{s}\right)$$

Löst man nun nach $\vec{s}$ auf, so erhält man ebenfalls:

$$\vec{s} = 2\cdot\vec{z} - \vec{p}$$

- Schwerpunkt:
  Gegeben sind die Eckpunkte $A(-2|3)$, $B(8|1)$ und $C(1|7)$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks ABC.



Es gilt:

$$\vec{s} = \vec{a} + \overrightarrow{AS} = \vec{a} + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_a} = \vec{a} + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\overrightarrow{m_a} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) - \vec{a}\right) =$$

$$= \vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{c} - \tfrac{2}{3}\vec{a} = \tfrac{1}{3}\vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{c} = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

Also: $\vec{s} = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 3\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Der Punkt S hat somit die Koordinaten $S\left(2\tfrac{1}{3} | 3\tfrac{2}{3}\right)$

Allgemein gilt für den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC:

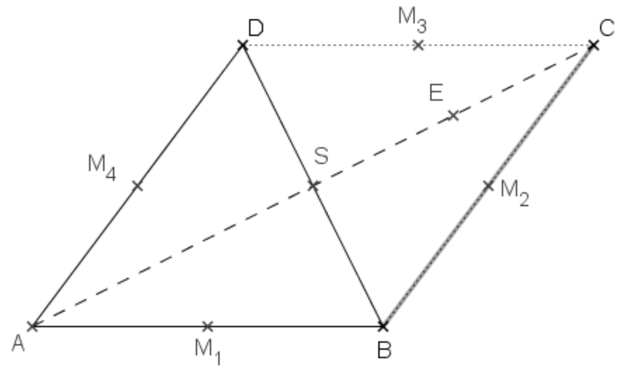
$$\vec{s} = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

Aufgaben:

1. Gegeben sind die vier Punkte $A(3|-1|-2)$, $B(-2|1|-3)$, $C(-1|5|0)$ und $D(9|1|2)$.
   Untersuchen Sie die Strecken $[AB]$ und $[CD]$ auf Parallelität.
   Bilden die vier Punkte ein Parallelogramm?

2. Ein Dreieck besitzt die Eckpunkte $A(0|1|2)$, $B(-1|3|-5)$ und $C(-2|-1|4)$.
   Berechnen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_a, M_b und M_c der Dreiecksseiten sowie die Koordinaten des Schwerpunktes S.

3. Gegeben sind die Punkte $A(1|4|0)$, $B(-2|6|-3)$ und $D(-5|-1|3)$.



   a) Bestimmten Sie den Punkt C so, dass ein Parallelogramm entsteht.
   b) Berechnen Sie die Seitenmittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 und den Diagonalenschnittpunkt S.
   c) Der Punkt E halbiert die Strecke $[SC]$. Bestimmen Sie seine Koordinaten.
      Prüfen Sie, ob E der Mittelpunkt der Strecke $[M_2M_3]$ ist.
      Zeigen Sie, dass die Strecke $[BD]$ und die Strecke $[M_2M_3]$ parallel sind und geben Sie an, um welchen Faktor die Strecke $[BD]$ länger als die Strecke $[M_2M_3]$ ist.

4. Von einem Parallelogramm ABCD sind die Punkte $C(1|-1|2)$, $D(0|4|-3)$ und $S(-0,5|1|3)$ bekannt (siehe Abbildung zu Aufgabe 3.). Berechnen Sie die Koordinaten von A und B.

5. Gegeben sind die Punkte $A(8|1|2)$, $B(-1|2|1)$ und $C(-1|0|-3)$. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Dreiecks ABC in der $x_1-x_2-\text{Ebene}$ liegt.

6. Von einem Dreieck ABC sind die Eckpunkte $A(2,5|-0,5|1)$, $B(-1|4,5|-1)$ und der Schwerpunkt $S(-0,5|1|3)$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C.

7. Ein Dreieck hat die Eckpunkte $A(t|-2t|-2t)$, $B(-1|3+t|-4)$ und $C(-2|t|4)$, mit $t \in \mathbb{R}$.
   a) Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Punkt $M_1(1|1|1)$ oder $M_2(2|-1|-7)$ der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ ist.
   b) Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Punkt $S_1(-1|1|0)$ oder $S_2(-1|2|0)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.