§ 3 Punkte, Ortsvektoren und Verbindungsvektoren - Lösung

1. Gegeben sind die vier Punkte $A(3|-1|-2)$, $B(-2|1|-3)$, $C(-1|5|0)$ und $D(9|1|2)$.
   Untersuchen Sie die Strecken $[AB]$ und $[CD]$ auf Parallelität.
   Bilden die vier Punkte ein Parallelogramm?

   $$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   $$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

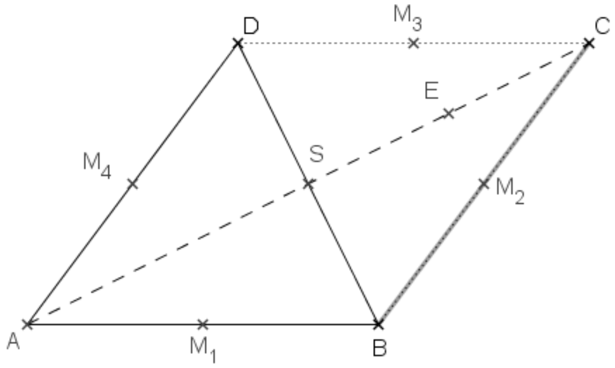
   Also: $\overrightarrow{CD} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$
   Somit sind die Strecken $[AB]$ und $[CD]$ parallel.
   Da die Strecke $[CD]$ doppelt so lang ist wie die Strecke $[AB]$ bilden die vier Punkte kein Parallelogramm. (Sie bilden ein Trapez!)

2. Ein Dreieck besitzt die Eckpunkte $A(0|1|2)$, $B(-1|3|-5)$ und $C(-2|-1|4)$.
   Berechnen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_a, M_b und M_c der Dreiecksseiten sowie die Koordinaten des Schwerpunktes S.

   $$\vec{m}_a = \tfrac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \quad \vec{m}_b = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{m}_c = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$
   $$\vec{s} = \tfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \tfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   $M_a(-1{,}5|1|-0{,}5)$ $\quad M_b(-1|0|3)$ $\quad M_c(-0{,}5|2|-1{,}5)$ $\quad S(-1|1|\tfrac{1}{3})$

3. Gegeben sind die Punkte $A(1|4|0)$, $B(-2|6|-3)$ und $D(-5|-1|3)$.



a) Bestimmten Sie den Punkt C so, dass ein Parallelogramm entsteht.

$\vec{c} = \vec{d} + \overrightarrow{DC} = \vec{d} + \overrightarrow{AB} = \vec{d} + \vec{b} - \vec{a} \quad \Rightarrow \quad C(-8|1|0)$

b) Berechnen Sie die Seitenmittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 und den Diagonalenschnittpunkt S.

$\vec{m}_1 = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \quad \Rightarrow \quad M_1(-0{,}5|5|-1{,}5)$

$\vec{m}_2 = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) \quad \Rightarrow \quad M_2(-5|3{,}5|-1{,}5)$

$\vec{m}_3 = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) \quad \Rightarrow \quad M_3(-6{,}5|0|1{,}5)$

$\vec{m}_4 = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{d}\right) \quad \Rightarrow \quad M_4(-2|1{,}5|1{,}5)$

$\vec{s} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{d}\right) \quad \Rightarrow \quad S(-3{,}5|2{,}5|0)$

c) Der Punkt E halbiert die Strecke $[SC]$. Bestimmen Sie seine Koordinaten. Prüfen Sie, ob E der Mittelpunkt der Strecke $[M_2M_3]$ ist.
Zeigen Sie, dass die Strecke $[BD]$ und die Strecke $[M_2M_3]$ parallel sind und geben Sie an, um welchen Faktor die Strecke $[BD]$ länger als die Strecke $[M_2M_3]$ ist.

$\vec{e} = \frac{1}{2}\left(\vec{s} + \vec{c}\right) \quad \Rightarrow \quad E(-5{,}75|1{,}75|0)$

$\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{m}_2 + \vec{m}_3\right) \quad \Rightarrow \quad M(-5{,}75|1{,}75|0)$ Somit ist M der Mittelpunkt der Strecke $[M_2M_3]$

Es gilt: $\overrightarrow{BD} = 2 \cdot \overrightarrow{M_2M_3}$ Somit ist $[BD] \parallel [M_2M_3]$, die Strecke $[BD]$ ist doppelt so lange wie die Strecke $[M_2M_3]$.

4. Von einem Parallelogramm ABCD sind die Punkte $C(1|-1|2)$, $D(0|4|-3)$ und $S(-0{,}5|1|3)$ bekannt (siehe Abbildung zu Aufgabe 3.). Berechnen Sie die Koordinaten von A und B.

S ist Mittelpunkt der Strecke $[CA]$; also
$\vec{s} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right) \Rightarrow 2\vec{s} = \vec{a} + \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{s} - \vec{c} \Rightarrow A(-2|3|4)$
S ist Mittelpunkt der Strecke $[DB]$; also
$\vec{s} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{d}\right) \Rightarrow 2\vec{s} = \vec{b} + \vec{d} \Rightarrow \vec{b} = 2\vec{s} - \vec{d} \Rightarrow B(-1|-2|9)$

5. Gegeben sind die Punkte $A(8|1|2)$, $B(-1|2|1)$ und $C(-1|0|-3)$. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Dreiecks ABC in der $x_1 - x_2 -$Ebene liegt.

   $\vec{s} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \Rightarrow S(2|1|0)$
   Da $x_3 = 0$ folgt: Der Punkt S liegt in der $x_1 - x_2 -$Ebene.

6. Von einem Dreieck ABC sind die Eckpunkte $A(2{,}5|-0{,}5|1)$, $B(-1|4{,}5|-1)$ und der Schwerpunkt $S(-0{,}5|1|3)$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C.

   $\vec{s} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \Rightarrow \vec{c} = 3\vec{s} - \vec{a} - \vec{b}$; $C(-3|-1|9)$

7. Ein Dreieck hat die Eckpunkte $A(t|-2t|-2t)$, $B(-1|3+t|-4)$ und $C(-2|t|4)$, mit $t \in \mathbb{R}$.
   a) Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Punkt $M_1(1|1|1)$ oder $M_2(2|-1|-7)$ der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ ist.

      M_1 kann nicht der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ sein.
      Für $t = 5$ ist M_2 Mittelpunkt der Strecke $[AB]$.

   b) Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Punkt $S_1(-1|1|0)$ oder $S_2(-1|2|0)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.

      S_1 ist für $t = 0$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC
      S_2 kann nicht Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein.