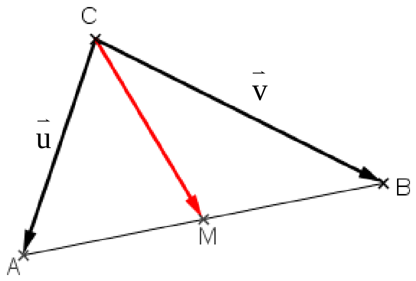
§ 2 Addition, Subtraktion und Skalar-Multiplikation von Vektoren - Lösung

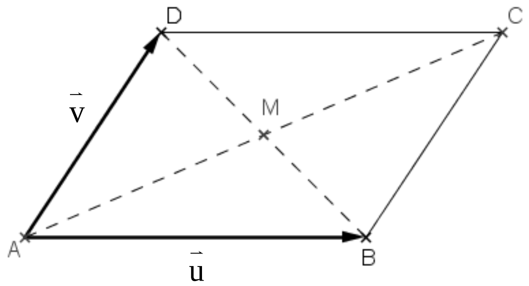
1. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC. Die Seiten $[CA]$ und $[CB]$ des Dreiecks legen die beiden Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$ fest. Man sagt auch: „Die Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ spannen das Dreieck ABC auf.“
   M ist die Mitte von $[AB]$. Drücke den Seitenhalbierenden Vektor $\overrightarrow{CM}$ durch die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \vec{u} + \tfrac{1}{2}\left(-\vec{u} + \vec{v}\right)\\ &= \vec{u} - \tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)\end{aligned}$$

(Aufgaben von diesem Typ löst man so: „Statt von C nach M direkt gehe von C nach M auf einem Umweg.“ Der Umweg soll sich dabei aus Vektoren zusammensetzen, die den Körper aufspannen.)

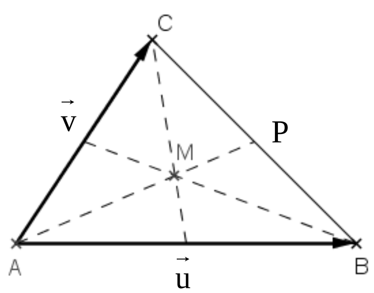
2. Das Parallelogramm ABCD wird durch die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ aufgespannt. Drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM}$ und $\overrightarrow{MC}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus.



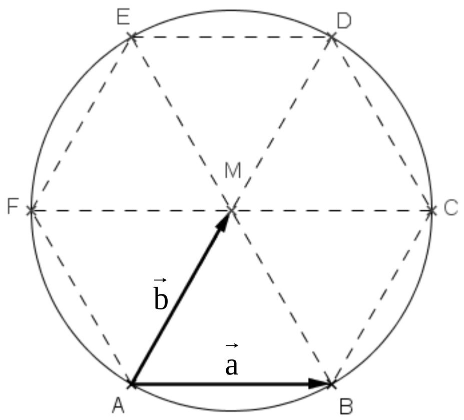
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \vec{u} + \vec{v}\\ \overrightarrow{BM} &= -\tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}\\ \overrightarrow{MC} &= \tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}\end{aligned}$$

3. Das Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ aufgespannt. M ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{AM}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus.
   (Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in dessen Schwerpunkt. Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}\\ &= \tfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}\right)\\ &= \tfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \tfrac{2}{3}\left(\vec{v} + \tfrac{1}{2}\left(-\vec{v} + \vec{u}\right)\right)\\ &= \tfrac{2}{3}\left(\vec{v} - \tfrac{1}{2}\vec{v} + \tfrac{1}{2}\vec{u}\right)\\ &= \tfrac{1}{3}\vec{u} + \tfrac{1}{3}\vec{v}\end{aligned}$$



4. Ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF mit dem Umkreismittelpunkt M wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AM}$ aufgespannt.
   Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{DF}$ und $\overrightarrow{BF}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.



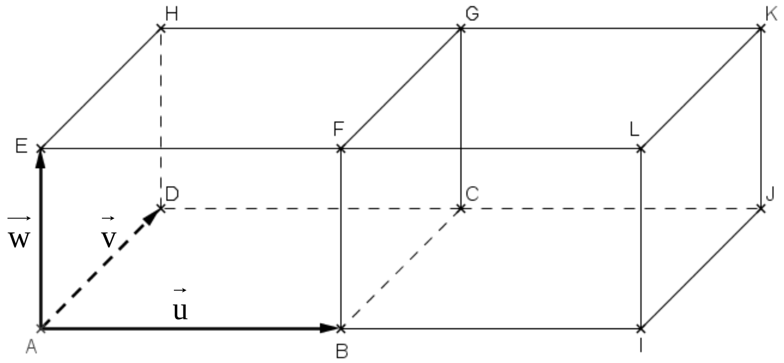
$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$
$\overrightarrow{FD} = \vec{a} + \vec{b}$
$\overrightarrow{BE} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$

$\overrightarrow{BD} = 2\vec{b} - \vec{a}$
$\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$
$\overrightarrow{CF} = -2\vec{a}$

$\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$
$\overrightarrow{DF} = -\vec{a} - \vec{b}$
$\overrightarrow{BF} = \vec{b} - 2\vec{a}$

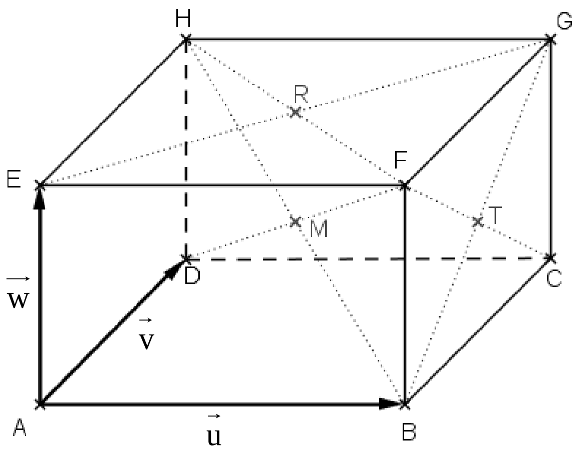
5. Der Quader ABCDEFGH wird durch die Vektoren $\vec{u} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AD}$ und $\vec{w} = \overline{AE}$ aufgespannt. Der Quader BIJCFLKG ist kongruent zum ersten Quader.
   Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{HF}$ und $\overrightarrow{HI}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus.

$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$
$\overrightarrow{AJ} = 2\vec{u} + \vec{v}$
$\overrightarrow{AK} = 2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
$\overrightarrow{HF} = \vec{u} - \vec{v}$
$\overrightarrow{HI} = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

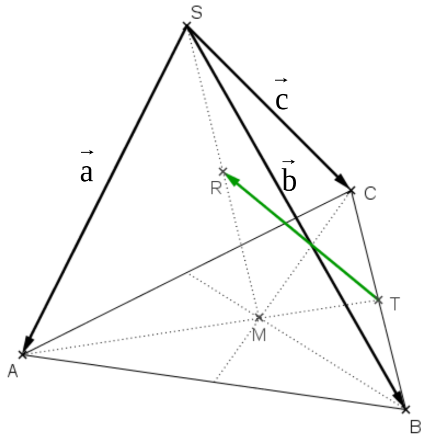


6. Der Quader ABCDEFGH wird durch die Vektoren $\vec{u} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AD}$ und $\vec{w} = \overline{AE}$ aufgespannt.
   Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{RT}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus.

$$\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$
$$\overrightarrow{AM} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right)$$
$$\overrightarrow{AR} = \vec{w} + \tfrac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$$
$$\overrightarrow{AT} = \vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v} + \tfrac{1}{2}\vec{w}$$
$$\overrightarrow{RT} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{u} - \vec{w}\right)$$



7. Die Pyramide ABCS wird durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$ aufgespannt. Der Mittelpunkt der Strecke $[BC]$ wird mit T bezeichnet, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist M und R ist der Mittelpunkt der Strecke $[SM]$. Bestimme $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{TR}$



$$\overrightarrow{AM} = \tfrac{1}{3}\vec{b} - \tfrac{2}{3}\vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{SM} = \tfrac{1}{3}\vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{TR} = \tfrac{1}{6}\vec{a} - \tfrac{1}{3}\vec{b} - \tfrac{1}{3}\vec{c}$$